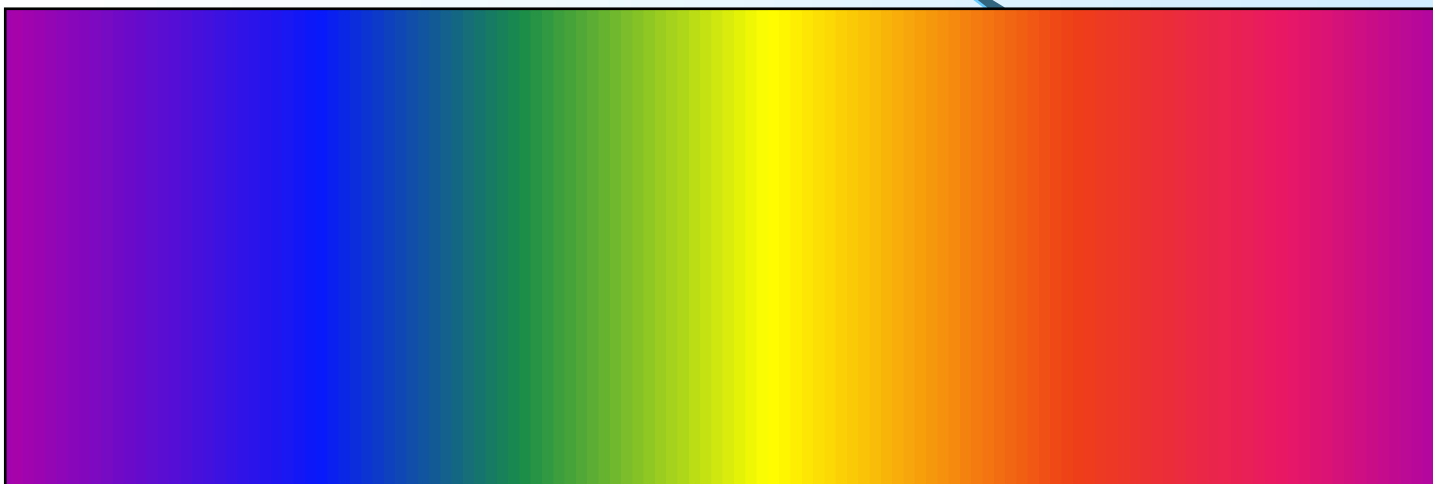
光とレンズ
-近軸光線の利用-

日本ライトハウス
視覚障害リハビリテーションセンター
田辺正明

可視光(七色)



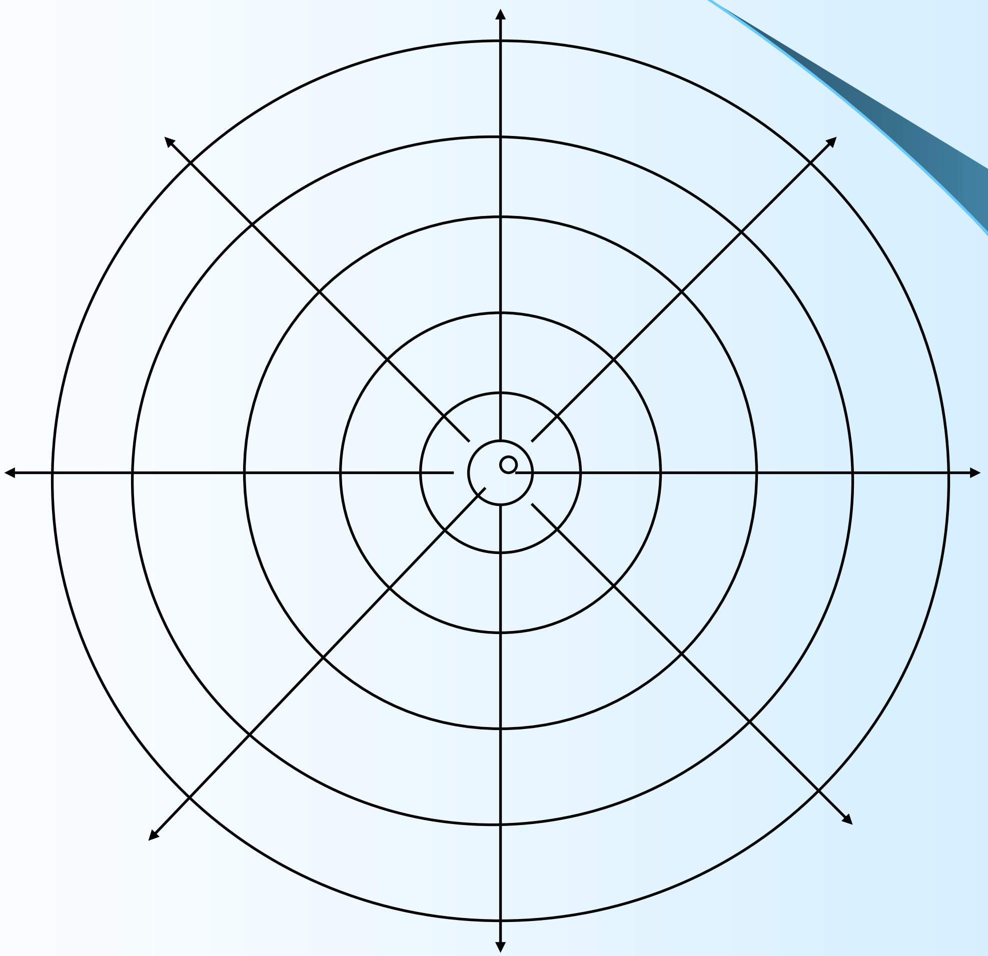
紫　藍　　青　　　緑　　　黄　　　　橙　　　赤

400nm　　　　　　　　　　　　　　　　800nm

日の出

2004.7.7 4:57の日の出。赤色で昇ってきて、オレンジ、黄色に変化し、最後に白色となって肉眼では見られなくなる。

光の伝わり方



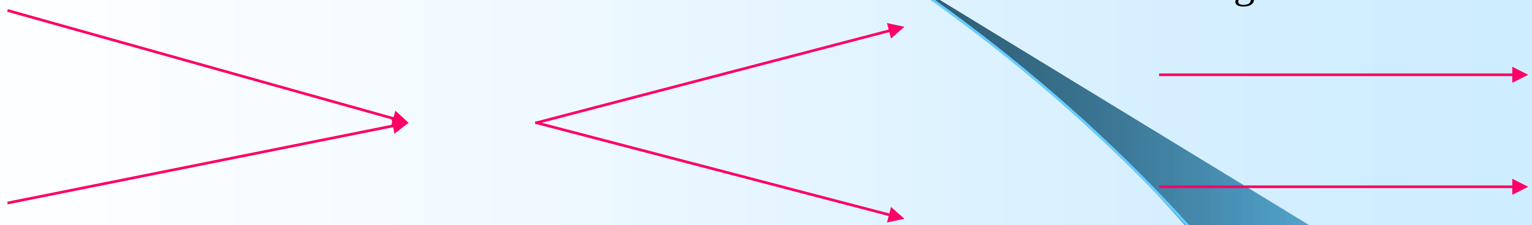
光の進行方向

（光線）

Vergence

・光線の広がり具合

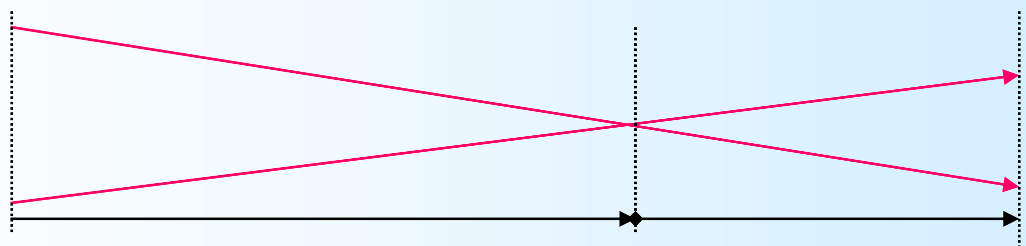
+ vergence　　　　- vergence　　　　0 vergence



・記数法

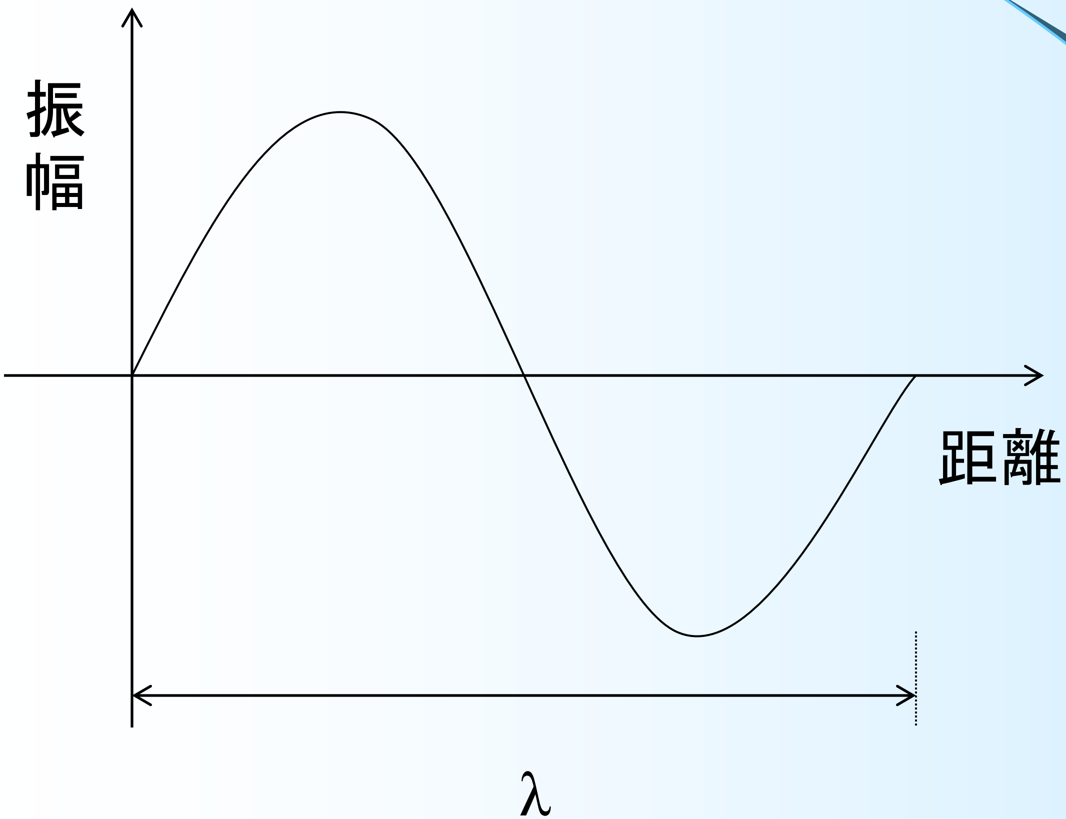
距離（m）の逆数

単位：D（ディオプトリ）



距離	2m	0.5m
符号	収束光線なので+	発散光線なのでー
vergence	$\frac{1}{2}m = 0.5D$	$-\frac{1}{0.5}m = -2D$

波



波の基本式

$v = \lambda f$

$\lambda = vT$

$\dfrac{1}{f} = T$

λ : 波長

f : 周波数

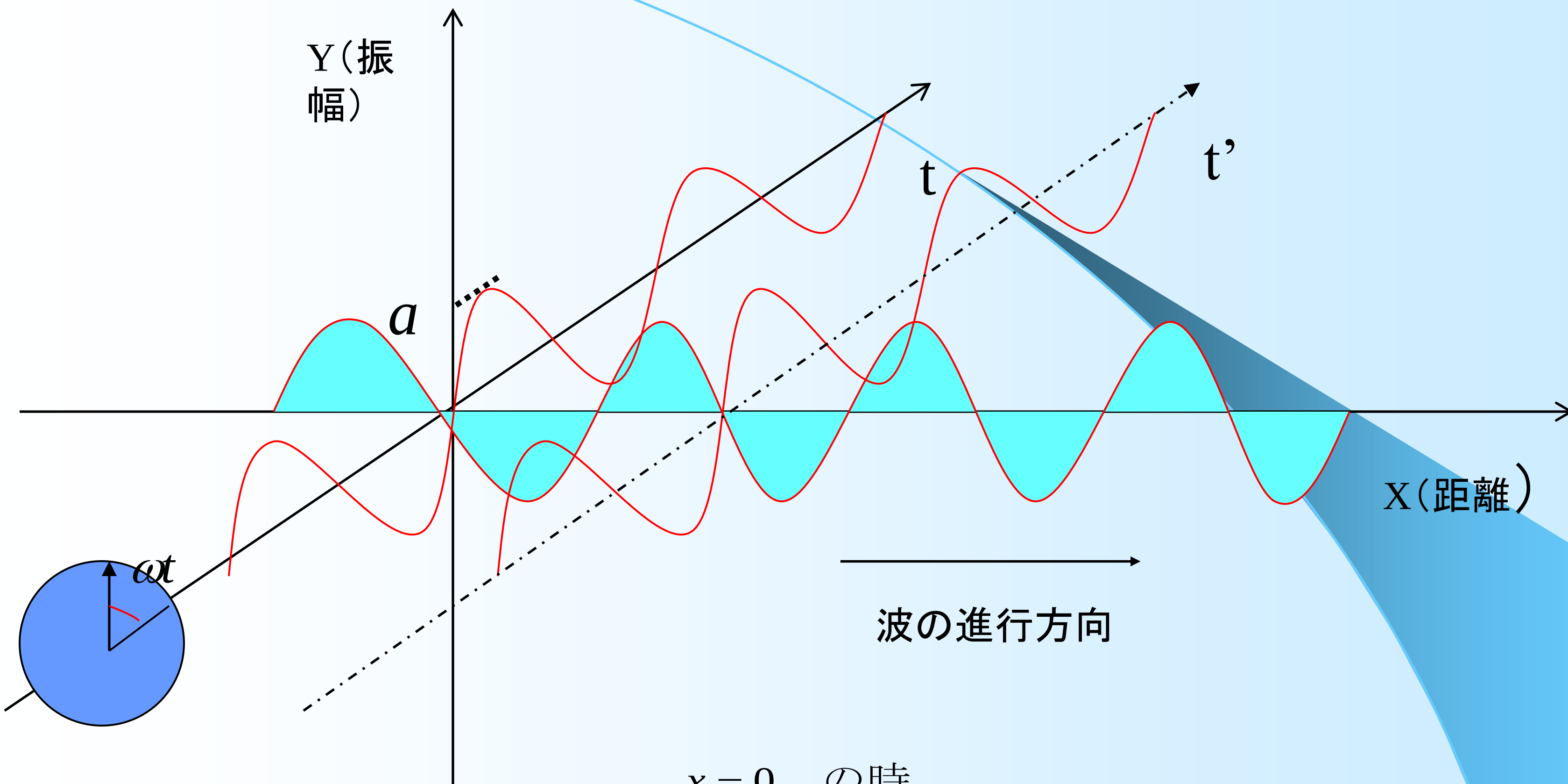
T : 周期

v : 速度

打ち寄せる波

- 浜辺の波は砂で作った山を打ち崩します。
- 光も同様の仕事をします。

正弦波の式



$x = 0$ の時

$$\ldots y = a \sin \omega t$$

$\omega = 2\pi f$: 角速度

xが任意の値の時(時間軸をt'とするところ)

$$\ldots y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

正弦波の式の求め方

- x =0 の時

$$y = a\sin \omega t = a\sin 2\pi ft$$

- xが任意の値を取るとき（時間軸をt’とするところ）

$$y = a\sin 2\pi ft'$$

$$t' = t - \frac{x}{v}\text{（}x = 0\text{の時間軸より}\frac{x}{v}\text{前の位置）}$$

$$\therefore y = a\sin 2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right) = a\sin 2\pi\frac{1}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{Tv}\right) = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{fx}{v}\right)$$

$$v = \lambda f\text{だから}$$

$$\therefore y = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

波の様々な現象

① 干渉（波の重ね合わせで強めあったり弱めあったりする）

利用法：眼鏡の反射防止膜

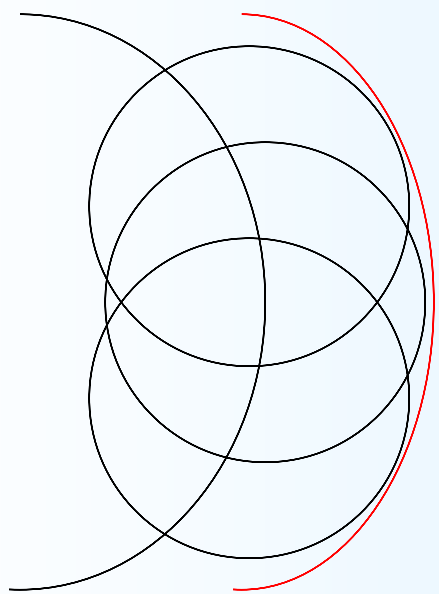
② 回折（障害物の陰にも曲がりこんで伝わる）

現象：ビルの裏でも音が聞こえる。
中波のラジオは放送局が見えなくても聞こえる

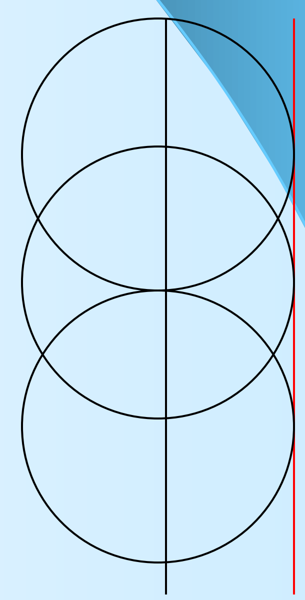
説明：ホイヘンスの原理

ホイヘンスの原理

- 1つの波面上の全ての点は波源となって、同じ速度、同じ振動数の小波（要素波）を作り出す。
個々の要素波は観測されず、これらの要素波の波面に共通に接する曲面が、その後の波面となる。

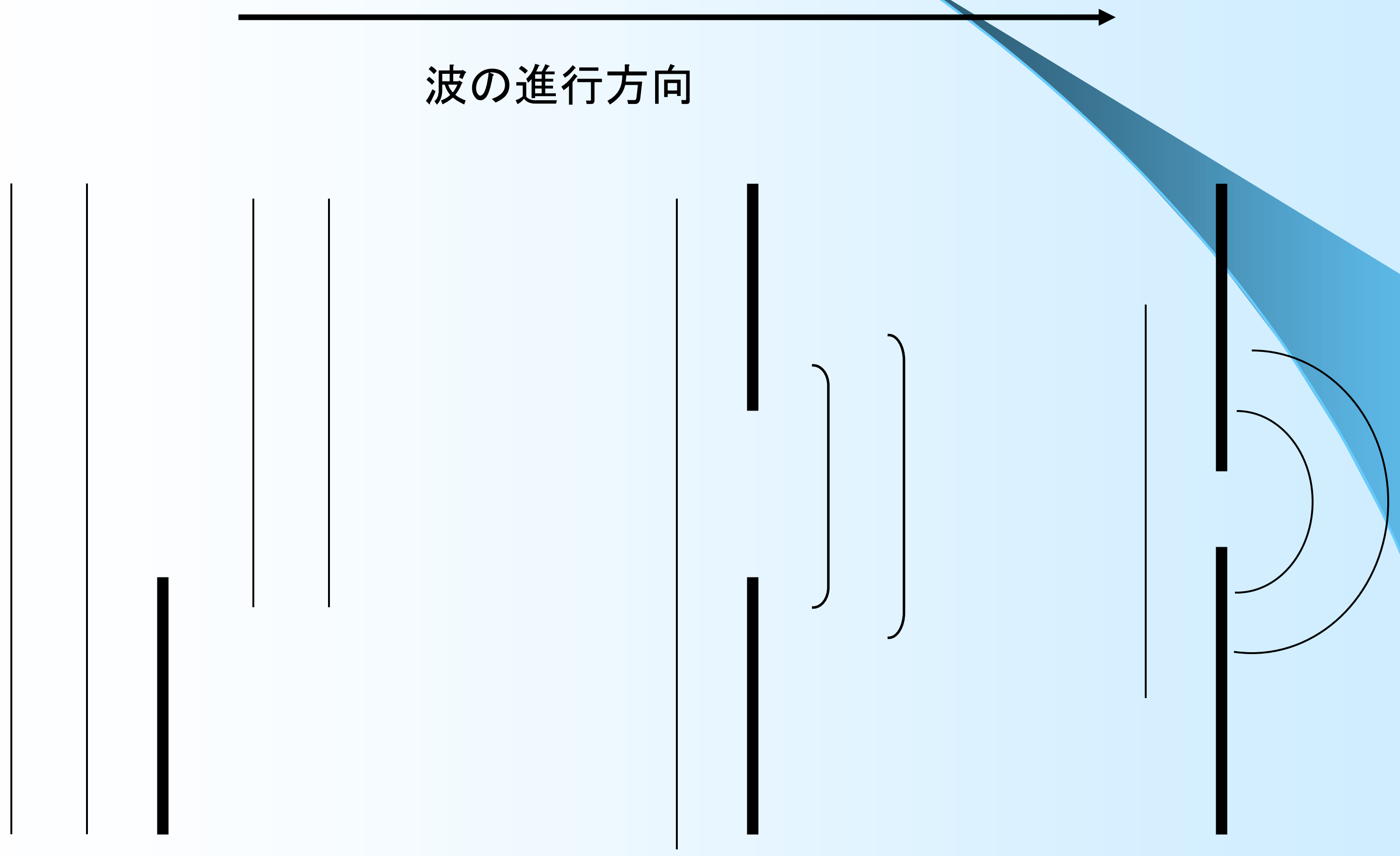


球面波

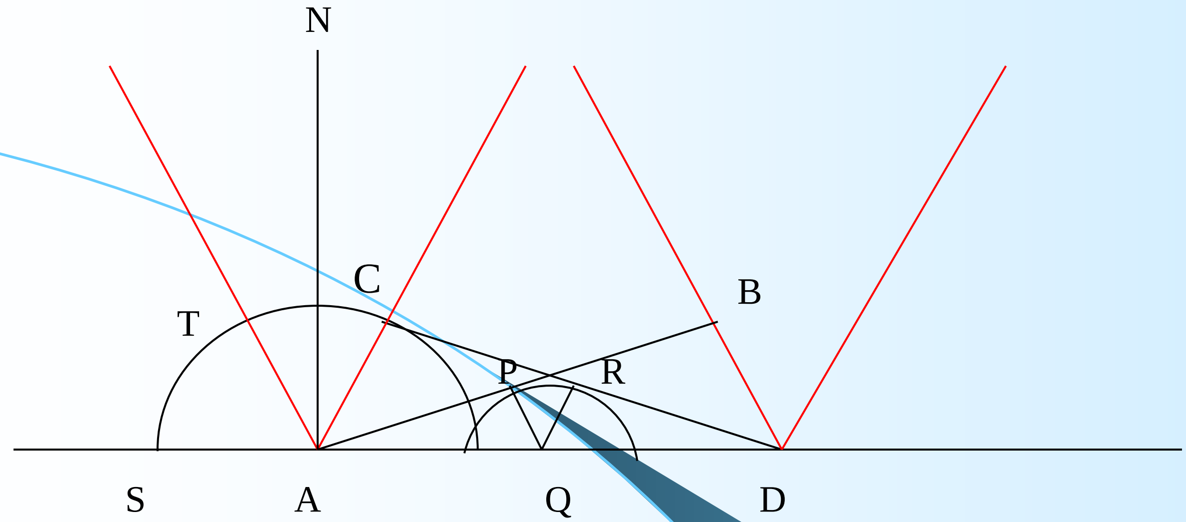


平面波

回折の説明



③ 反射



$$\frac{PQ}{BD}=\frac{AQ}{AD}=\frac{AD-QD}{AD}=1-\frac{QD}{AD}=1-\frac{QR}{AC}=1-\frac{QR}{BD}$$

$$\therefore \frac{PQ}{BD}+\frac{QR}{BD}=1$$

$$\therefore PQ+QR=BD$$

ゆえに、AD上の各点から次々に遅れて出た要素波は全てCDに達するのでCDは反射波の波面となる。

次に直角三角形の斜辺と１辺が等しいので

$\Delta ABD \equiv \Delta DCA$

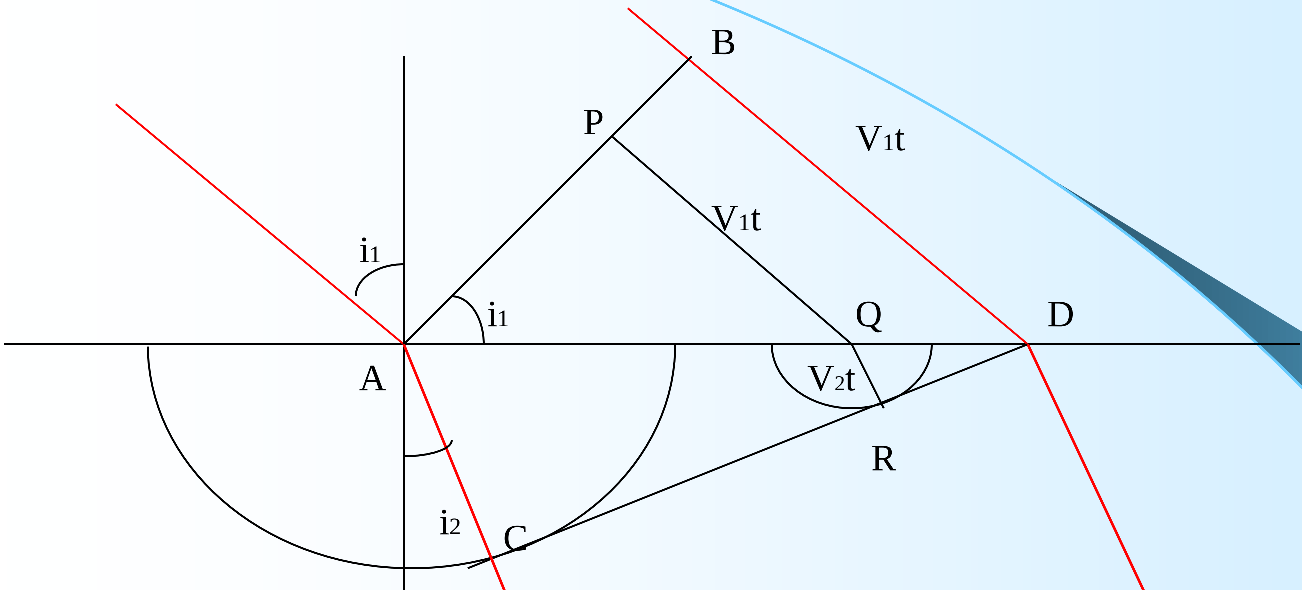
また、$TA // BD$

$\therefore \angle TAS=\angle BDA=\angle CAD$

よって$\angle TAS=\angle CAD$の余角をとって

$\angle TAN=\angle CAN$

④ 屈折



$$\frac{PQ}{BD}=\frac{AQ}{AD}=\frac{AD-QD}{AD}=1-\frac{QD}{AD}=1-\frac{QR}{AC};\frac{PQ}{BD}+\frac{QR}{AC}=1;\frac{V_1t_1}{V_1t}+\frac{V_2t_2}{V_2t}=1;\frac{t_1}{t}+\frac{t_2}{t}=t;t_1+t_2=t$$

t秒後にはAB上の任意の点PはCD上のR上に至る

$$\frac{AC}{AD}=\sin i_2;AD=\frac{AC}{\sin i_2}=\frac{V_2t}{\sin i_2};\frac{BD}{AD}=\sin i_1;AD=\frac{BD}{\sin i_1}=\frac{V_1t}{\sin i_1};\quad\therefore\frac{V_2t}{\sin i_2}=\frac{V_1t}{\sin i_1};\frac{V_2}{V_1}=\frac{\sin i_2}{\sin i_1}$$

$n_2=\dfrac{c}{V_2}, n_1=\dfrac{c}{V_1}$とすると$V_2=\dfrac{c}{n_2}, V1=\dfrac{c}{n_1}$(c:光速); $\dfrac{\frac{c}{n_2}}{\frac{c}{n_1}}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{\sin i_2}{\sin i_1}$

$\therefore n_1\sin i_1=n_2\sin i_2$(スネルの法則)

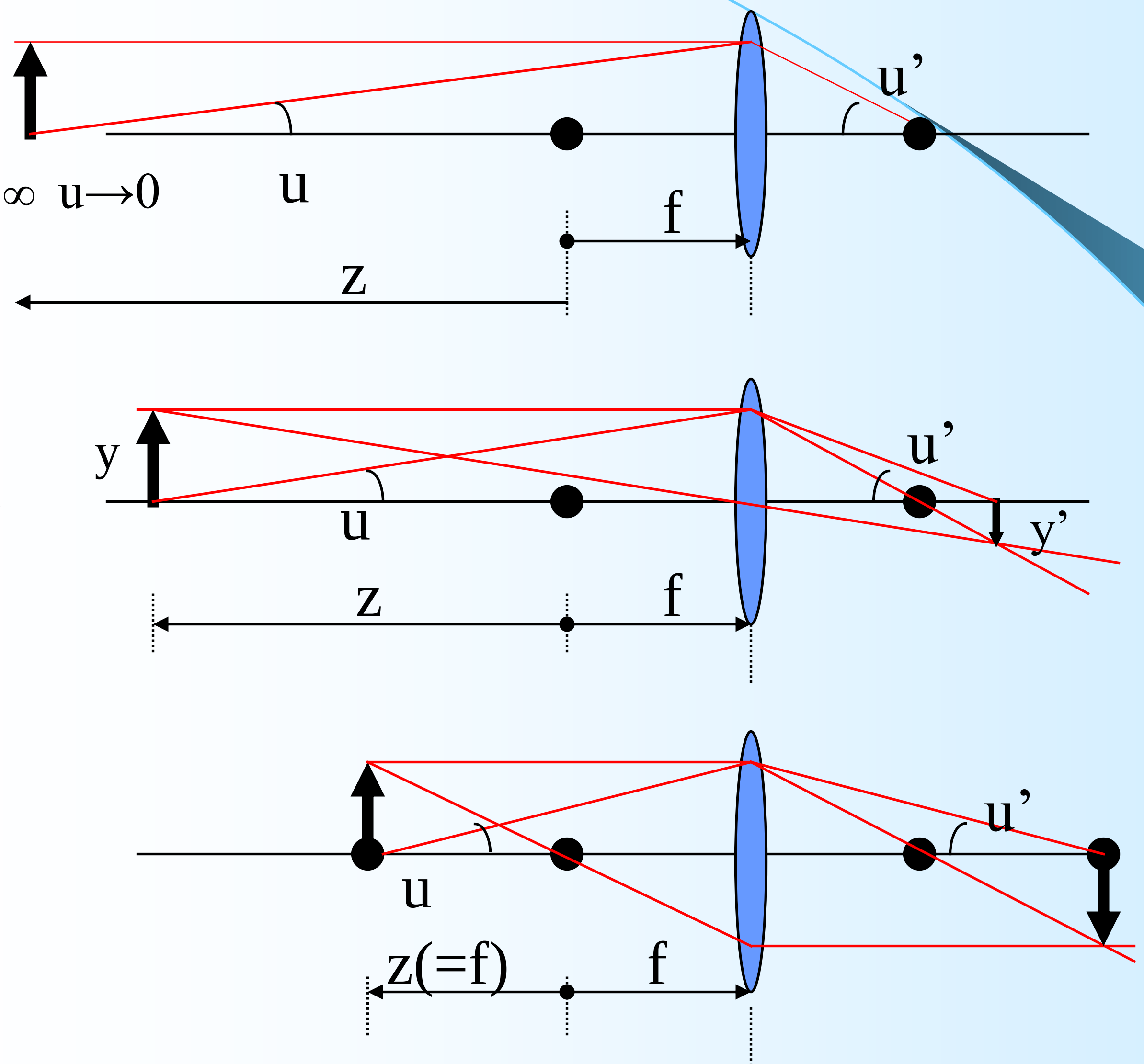
真空中の速度をcとし、$V_1=c$とすると$n_1=1$

$\therefore n_2=\dfrac{\sin i_1}{\sin i_2}$(絶対屈折率)

レンズによる結像の様子（1）

倍率(y’/y)

実像

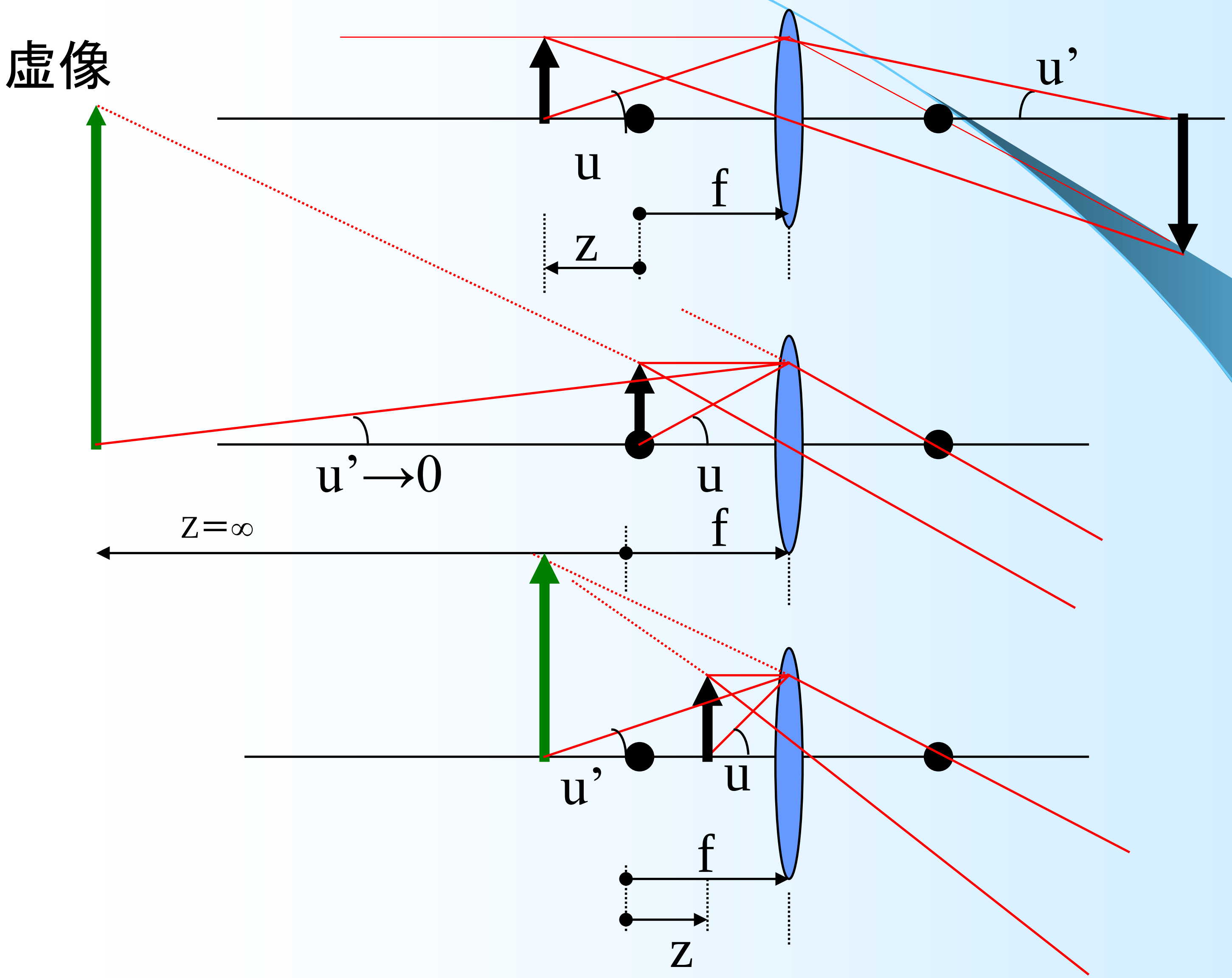


$$\frac{u}{u'} = 0$$
$$\frac{f}{z} = 0$$

$$\frac{u}{u'} > -1$$
$$\frac{f}{z} > -1$$

$$\frac{u}{u'} = -1$$
$$\frac{f}{z} = -1 (z = f)$$

レンズによる結像の様子(2)



倍率

$$\frac{u}{u'} < -1$$

$$\frac{f}{z} < -1$$

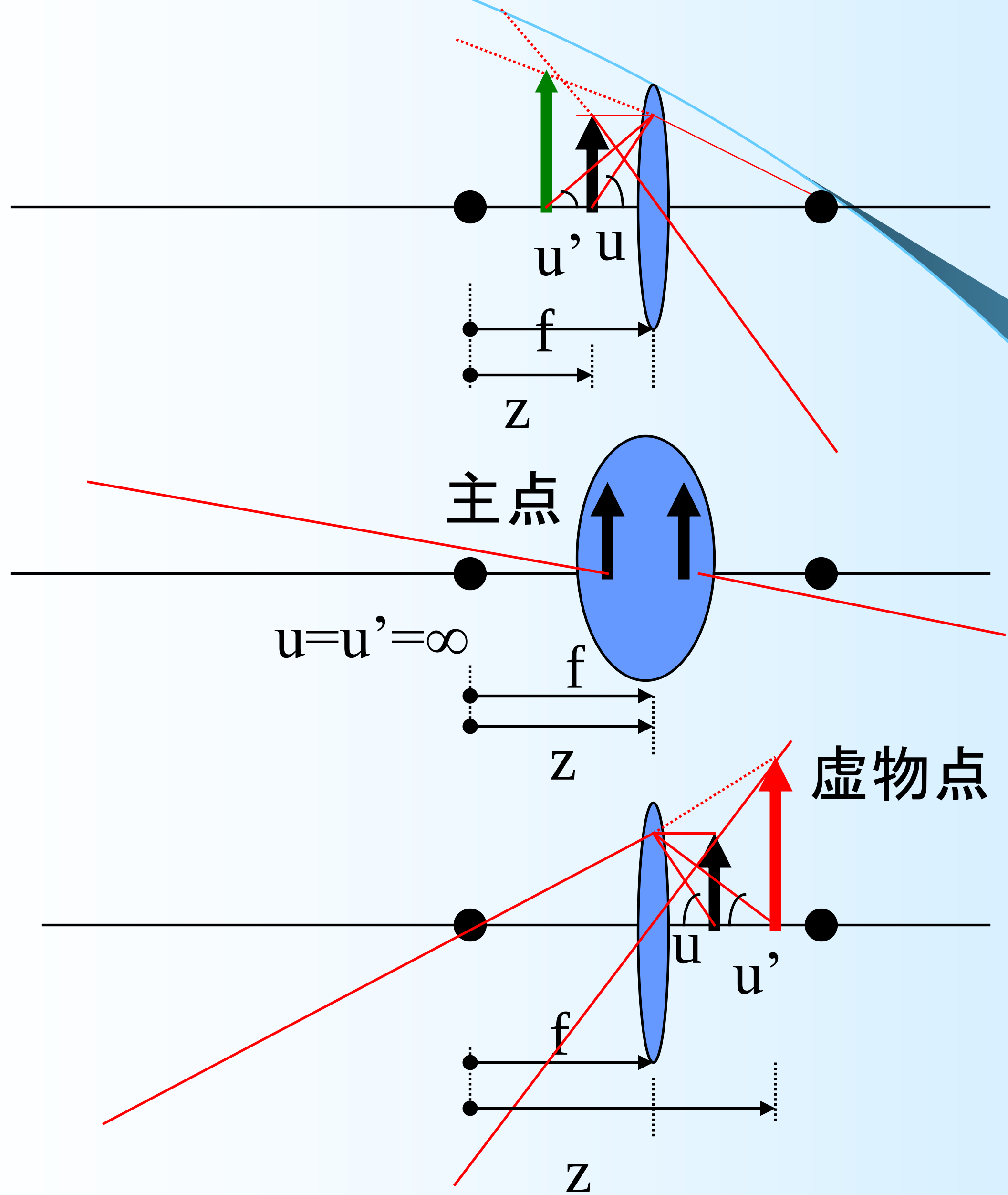
$$\frac{u}{u'} > \infty$$

$$\frac{f}{z} > \infty$$

$$\frac{u}{u'} > 1$$

$$\frac{f}{z} > 1$$

レンズによる結像の様子(3)



倍率

$$\frac{u}{u'} > 1$$

$$\frac{f}{z} > 1$$

$$\frac{u}{u'} = 1$$

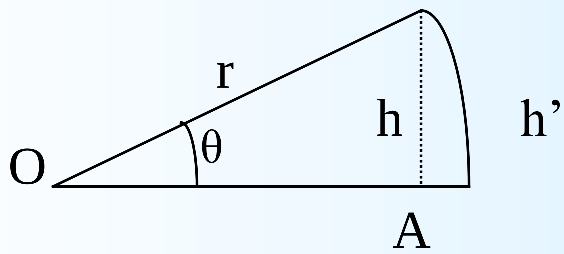
$$\frac{f}{z} = 1$$

$$\frac{u}{u'} < 1$$

$$\frac{f}{z} < 1$$

近軸光線(微小な角の利用)

$\sin\theta = \theta$を利用する（θはラジアン）



$$\sin\theta = \theta$$

$$\theta = \frac{h'}{r} \quad \sin\theta = \frac{h}{r}$$

θが十分小さければ$h = h'$

$$\therefore \sin\theta = \theta$$

$$\cos\theta = 1$$

$$\cos\theta = \frac{OA}{r}$$

θが十分小さければ$OA = r$

$$\therefore \cos\theta = \frac{r}{r} = 1$$

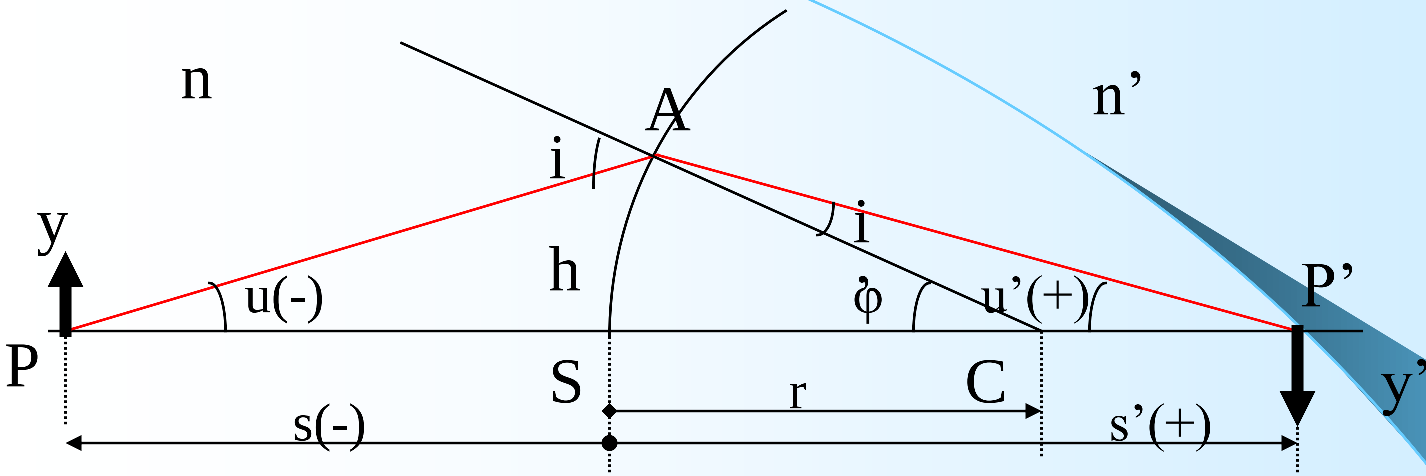
$$\tan\theta = \theta$$

$$\theta = \frac{h'}{r} \quad \tan\theta = \frac{h}{OA}$$

θが十分小さければ$OA = r$

$$\therefore \tan\theta = \theta$$

Abbeの不変量から球面の結像公式



スネルの法則より

$n \sin i = n' \sin i'$

$\therefore ni = n' i'$

ΔAPCにおいて

$i = \theta - u$

$\Delta AP'C$において

$i = \phi - u'$

$\therefore n(\phi - u) = u'(\phi - u')$

ここで$\phi = \dfrac{h}{r}, \quad u = \dfrac{h}{s}, \quad u' = \dfrac{h}{s'}$

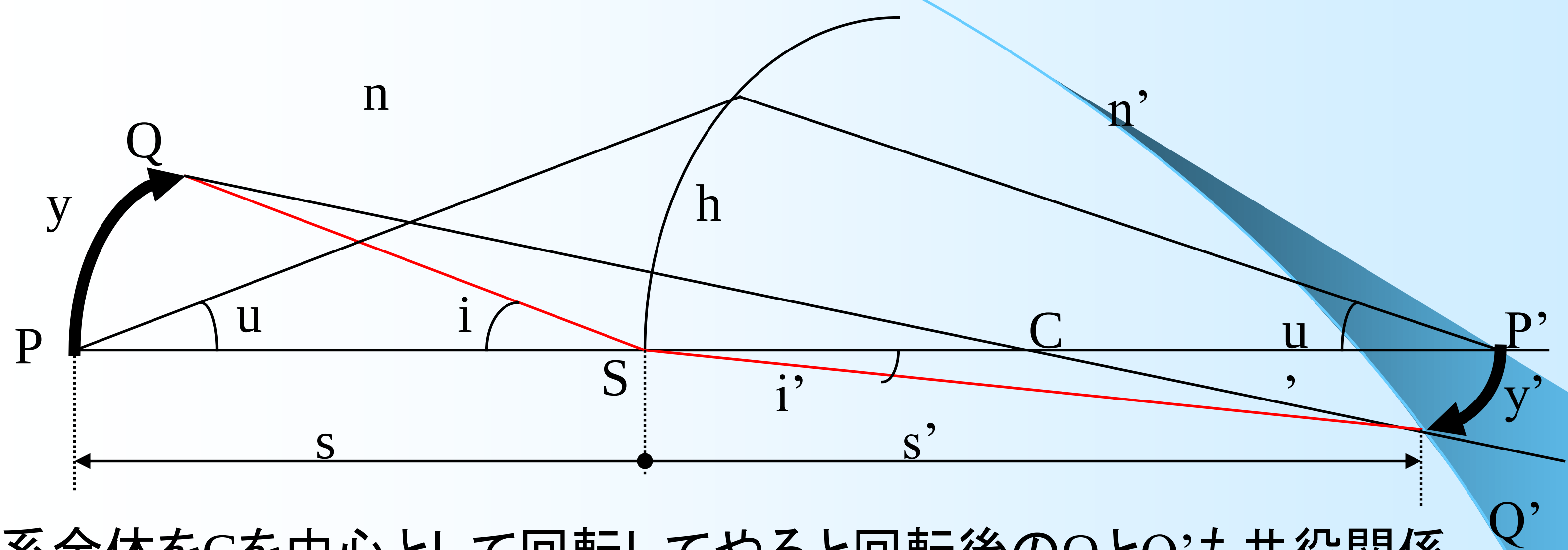
$$n\left(\frac{h}{r} - \frac{h}{s}\right) = n'\left(\frac{h}{r} - \frac{h}{s'}\right)$$

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right) \quad \cdots \quad \text{Abbeの不変量}$$

$$\frac{n}{r} - \frac{n}{s} = \frac{n'}{r} - \frac{n'}{s}$$

$$\frac{n}{s} + \frac{n'-n}{r} = \frac{n'}{s'} \quad \cdots \quad \text{球面の結像公式}$$

Lagrange（ラグランジュ）の不変量



系全体をCを中心として回転してやると回転後のQとQ’も共役関係

光線QSQ'を考える。

スネルの法則より

$$ni = n'i'$$

また、$i = \frac{y}{s} \quad i' = \frac{y'}{s'}$

よって、$\frac{ny}{s} = \frac{n'y'}{s'} \quad \cdots \quad ①$

更に、$u = \frac{h}{s}, \quad u' = \frac{h}{s'}, \quad s = \frac{h}{u}, \quad s' = \frac{h}{u'} \quad \cdots \quad ②$

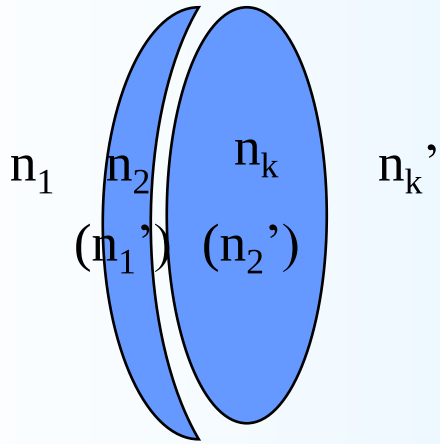
①に②を代入

$$\frac{ny}{\frac{h}{u}} = \frac{n'y'}{\frac{h}{u'}}; \quad \frac{nuy}{h} = \frac{n'u'y'}{h}$$

$\therefore nuy = n'u'y' \quad \cdots$ Lagrangeの不変量

複数面からなる光学系

最終面をK面とする。



第１面屈折後のn_1', u_1', y_1'は第２面に対してはそのままn_2, u_2, y_2となる。

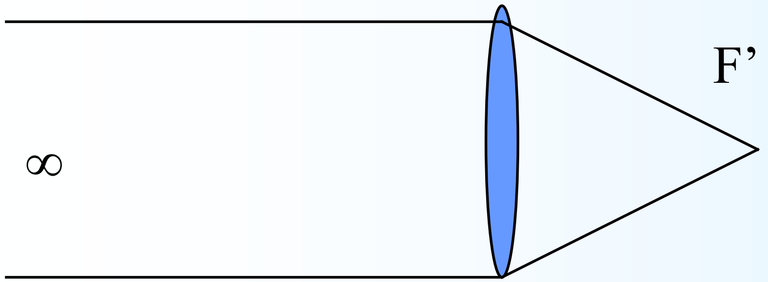
$$n_1u_1y_1 = n_1'u_1'y_1' = n_2u_2y_2 = n_2'u_2'y_2' = \cdots = n_k'u_k'y_k'$$

$$\therefore n_1u_1y_1 = n_k'u_k'y_k'$$

$n_1 = n_k' = 1$とすると

$$u_1y_1 = u_k'y_k'$$

焦点



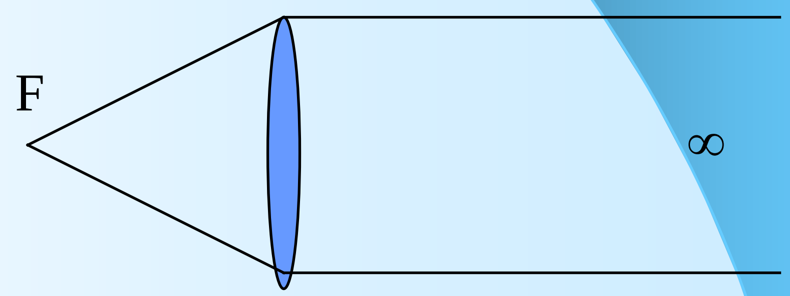
像側焦点、後側焦点、第2焦点

無限遠物点に対応する像位置

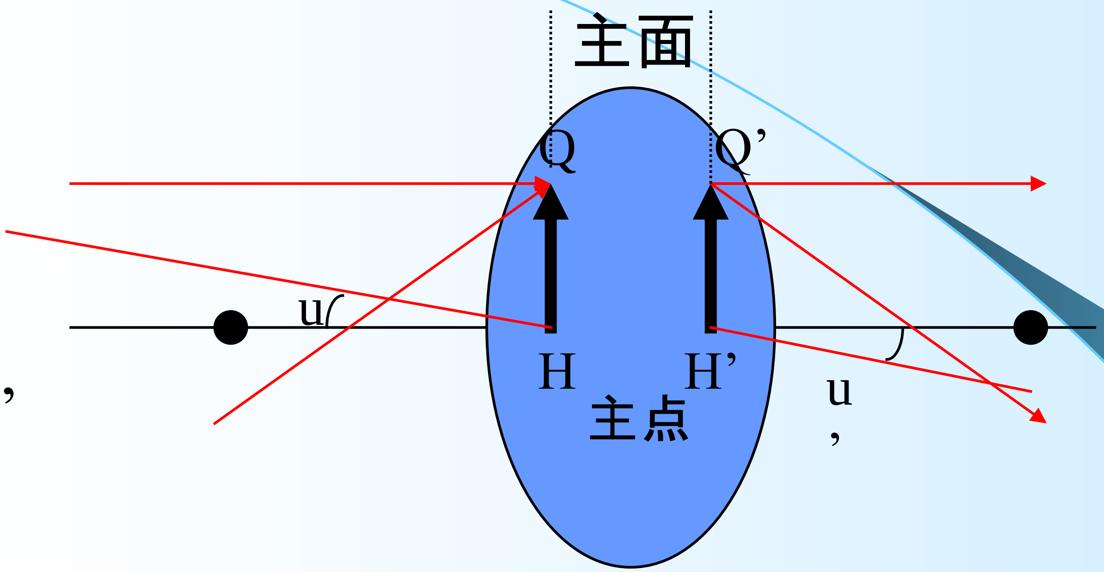
物体側焦点、前側焦点、第1焦点

像位置が無限遠になる時の共役点

像側より逆方向に平行光線束を通した時の結像点



主点、節点



u=u’

横倍率

$$\beta = \frac{H'Q'}{HQ} = 1$$

β=1の一対の軸上共役点をそれぞれ物体側または前側主点、および像側または後側主点という。（主点はprincipal point, 記号のHはドイツ語のHaupt Punktが語源）

主点を通る光線が軸となす角u, u’についてはLagrangeの式より

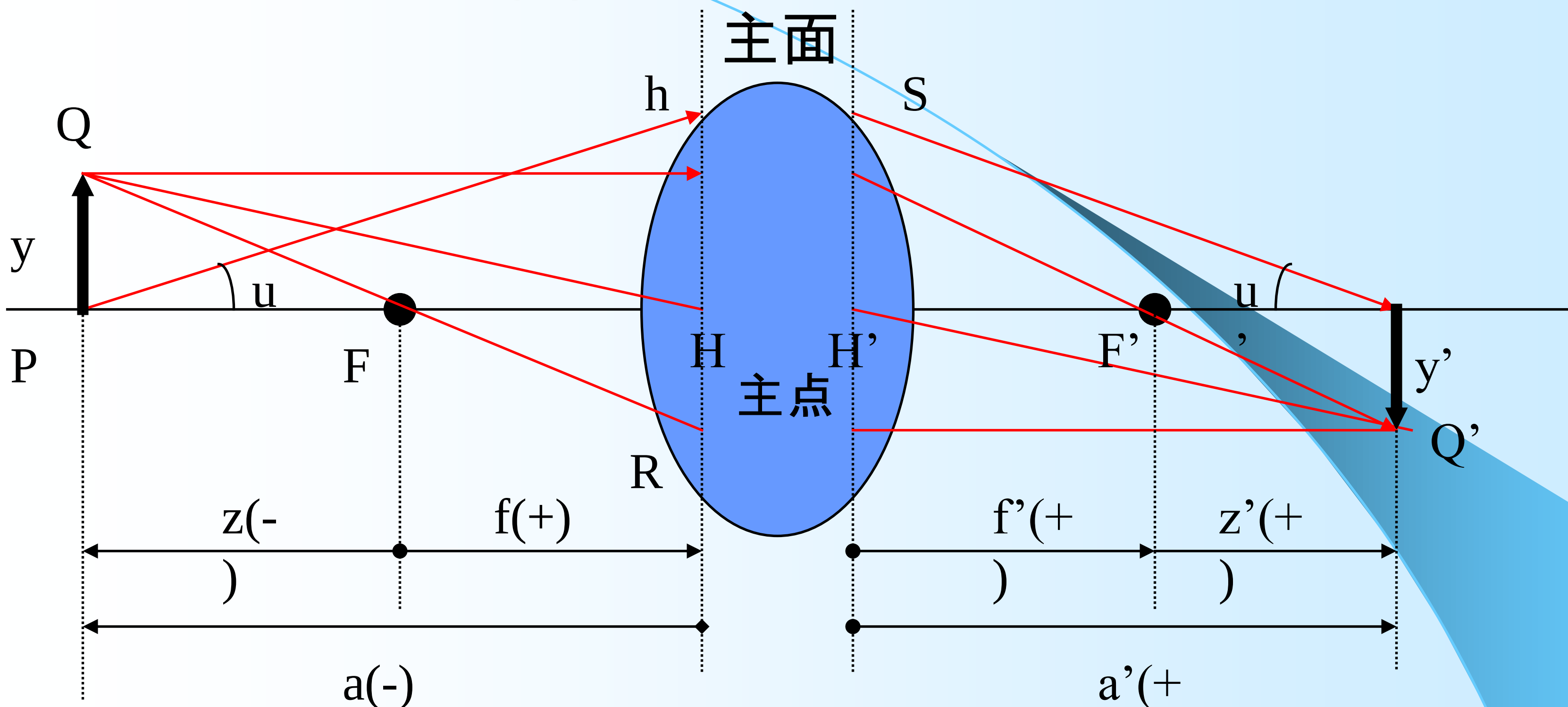
nu=n’u’　→　u, u’は両側媒質のnに反比例

よって、主点とは別にu=u’が常に成立する一対の共役点が存在することになり、これを**節点**(nodal point)という。（両側媒質が同一（例：空気）の場合は主点と、節点は同一点。

焦点、主点のまとめ

- 物体側でFを通る光線は像側で光軸に平行になり、物体側で光軸に平行な光線は像側でF’を通る。
- 全ての光線は物体側および像側の主面を同じ高さで切る。
- 物体側でHに向かう光線は像側でH’を通り、光軸となす角u, u’はn, n’に反比例する。n=n’の時は方向を変えずに進行する。
- 主点と焦点との距離を焦点距離という。物体側、像側それぞれにある。

結像関係の式(1)



ΔPQF と ΔHRF, $\Delta H'SF'$ と $P'Q'F'$ は相似なので、

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{z} = -\frac{z'}{f'}$$

$$\therefore zz' = -ff' \quad \cdots \quad$$ Newtonの式①

$z = a + f,\ z' = a' - f'$ を代入すると

$$(a+f)(a'-f') = -ff'$$

$$aa' - af' + a'f - ff' = -ff'$$

$$aa' - af' + a'f = 0$$

$$a'f - af' = -aa'$$

$$\therefore \frac{f}{a} - \frac{f'}{a'} = -1 \quad \cdots \quad$$ Newtonの式②

結像関係の式(2)

Lagrangeの式$nuy = n'u'y'$に　$u = \frac{h}{a}$,　$u' = \frac{h}{a'}$を代入すると

$$\frac{nhy}{a} = \frac{n'h'y'}{a'};\quad \frac{ny}{a} = \frac{n'y'}{a'};\quad \frac{n'y'}{ny} = \frac{a'}{a}$$

$$\therefore \beta = \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'}\frac{a'}{a}$$

物体および像の大きさはそれぞれの主点より離れるほど大きくなり、$n = n'$の場合は距離に比例する。

上式に$a = z - f$, $a' = z' + f'$を代入し、fを乗じると、

$$\beta = \frac{n(z' + f')f}{n'(z - f)f} = \frac{n(fz' - zz')}{n'(z - f)f}\quad \langle \because ff' = -zz' \rangle \qquad = -\frac{nz'(f - z)}{n'f(f - z)} = -\frac{n}{n'}\frac{z'}{f}$$

つまり、

$$\beta = -\frac{z'}{f'} = -\frac{n}{n'}\frac{z'}{f};\quad -\frac{1}{f'} = -\frac{n}{n'f}$$

$\therefore \frac{f}{f'} = \frac{n}{n'};\quad f' = \frac{n'}{n}f$　($n = 1\langle$空気$\rangle$とすると$f' = n'f$)

すなわち、物体側焦点距離と像側焦点距離はそれぞれの媒質の屈折率に比例する。

結像関係の式(3)

● 一般的には両側倍率は空気など同一の場合が多いので、$n = n'$を$f' = \frac{n'}{n} f$に代入すると、

$$\frac{f}{f'} = 1$$

$$\therefore f = f'$$

よって、両側の焦点距離の区別の必要はなく、単に焦点f（$equivalent\ \ focal\ length$）とする。

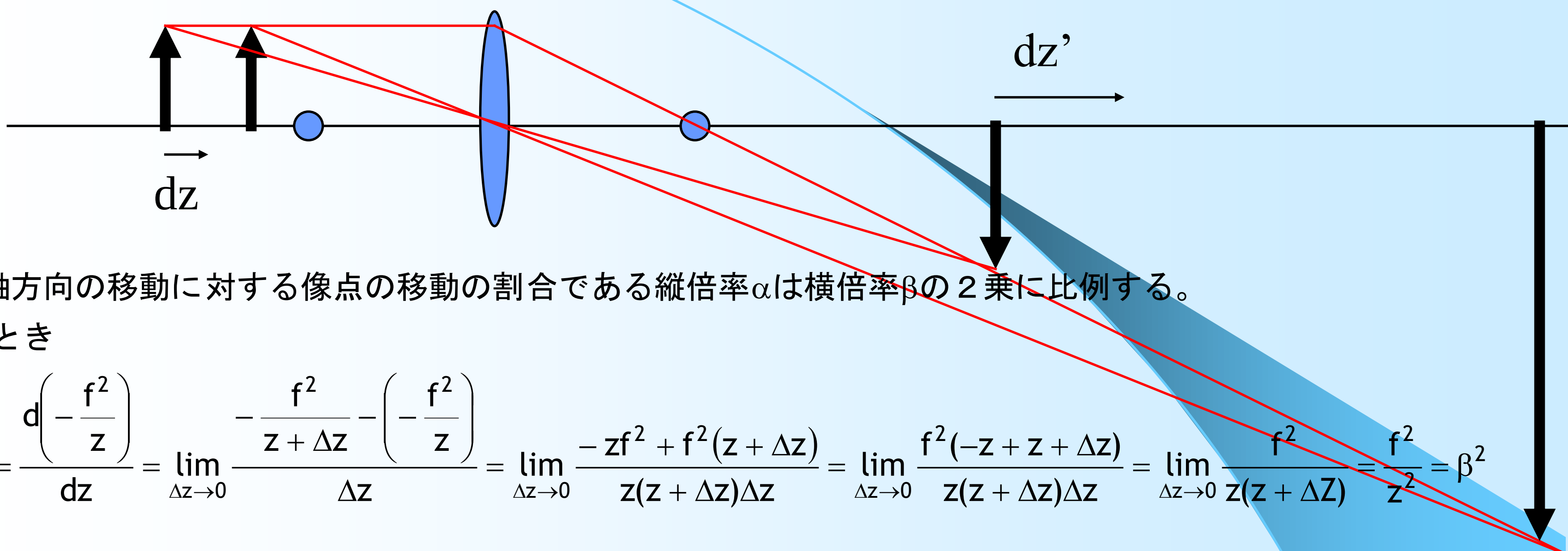
● $n = n', f = f'$を$zz' = -ff'$($Newton$の式①）、$\frac{f}{a} - \frac{f'}{a'} = -1$($Newton$の式②)、$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'}\frac{a'}{a}$に代入すると、（両側媒質を空気等に仮定する）

$$zz' = -f^2$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = -\frac{1}{f} \qquad \left(\begin{array}{l} \frac{1}{a} + \frac{1}{f} = \frac{1}{a'} \\ \quad \frac{1}{a} = A, \frac{1}{f} = F, \frac{1}{a'} = A' \text{を代入し} \\ A + F = A' \text{(球面レンズの結像公式)} \end{array} \right)$$

$$\beta = \frac{a'}{a}$$

縦倍率



物点の軸方向の移動に対する像点の移動の割合である縦倍率αは横倍率βの２乗に比例する。

$n = n'$のとき

$$\alpha = \frac{dz'}{dz} = \frac{d\left(-\frac{f^2}{z}\right)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-\frac{f^2}{z+\Delta z} - \left(-\frac{f^2}{z}\right)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-zf^2 + f^2(z+\Delta z)}{z(z+\Delta z)\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f^2(-z+z+\Delta z)}{z(z+\Delta z)\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f^2}{z(z+\Delta Z)} = \frac{f^2}{z^2} = \beta^2$$

$n \neq n'$のとき

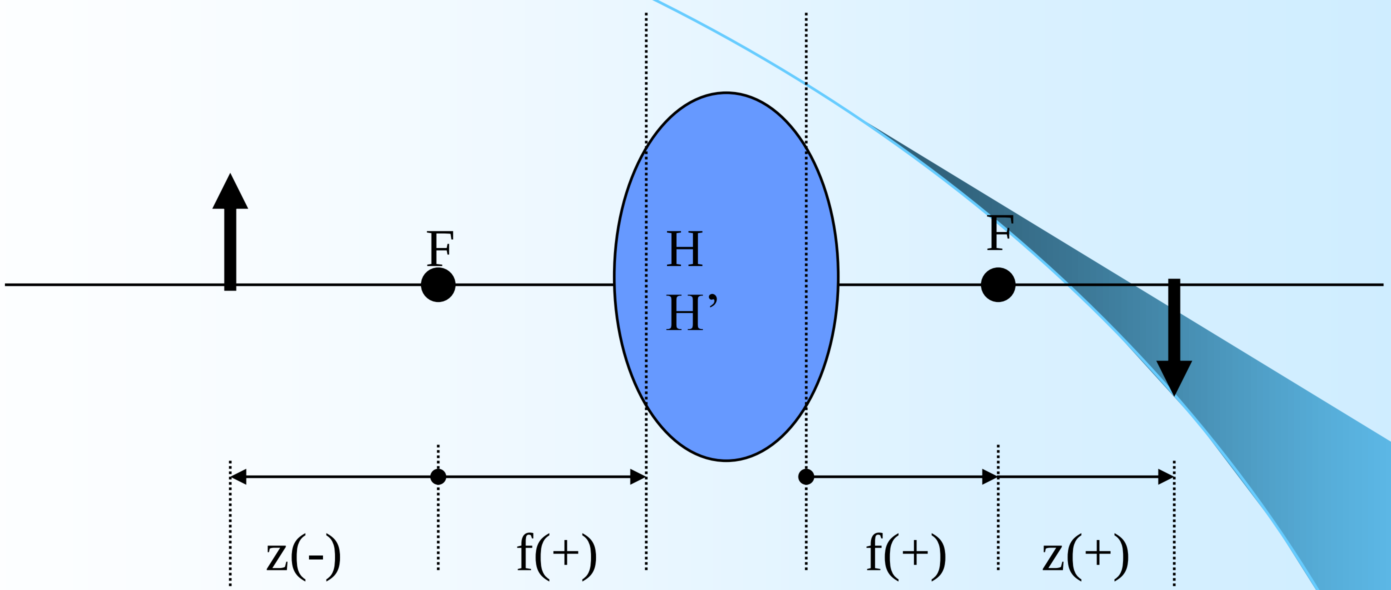
$zz' = -ff'$より$z' = -\frac{ff'}{z}$、また、$\frac{f'}{f} = \frac{n'}{n}$より$f' = \frac{n'f}{n}$

$$\therefore z' = -\frac{f\left(\frac{n'f}{n}\right)}{z} = -\frac{n'f^2}{nz} = \frac{n'}{n}\left(-\frac{f^2}{z}\right)$$

aが定数であるaf(z)の導関数はaf′(z)だから

$$\alpha = \frac{dz'}{dz} = \frac{d\left\{\frac{n'}{n}\left(-\frac{f^2}{z}\right)\right\}}{dz} = \frac{n'}{n}\frac{d\left(-\frac{f^2}{z}\right)}{dz} = \frac{n'}{n}\frac{f^2}{z^2} = \frac{n'}{n}\beta^2$$

共役長（物点像点間距離）



$$L = -z + f + \overrightarrow{HH} + f + z'$$

$\beta = \dfrac{f}{z} = -\dfrac{z'}{f}$ より、$z = \dfrac{f}{\beta}$、$z' = -\beta f$

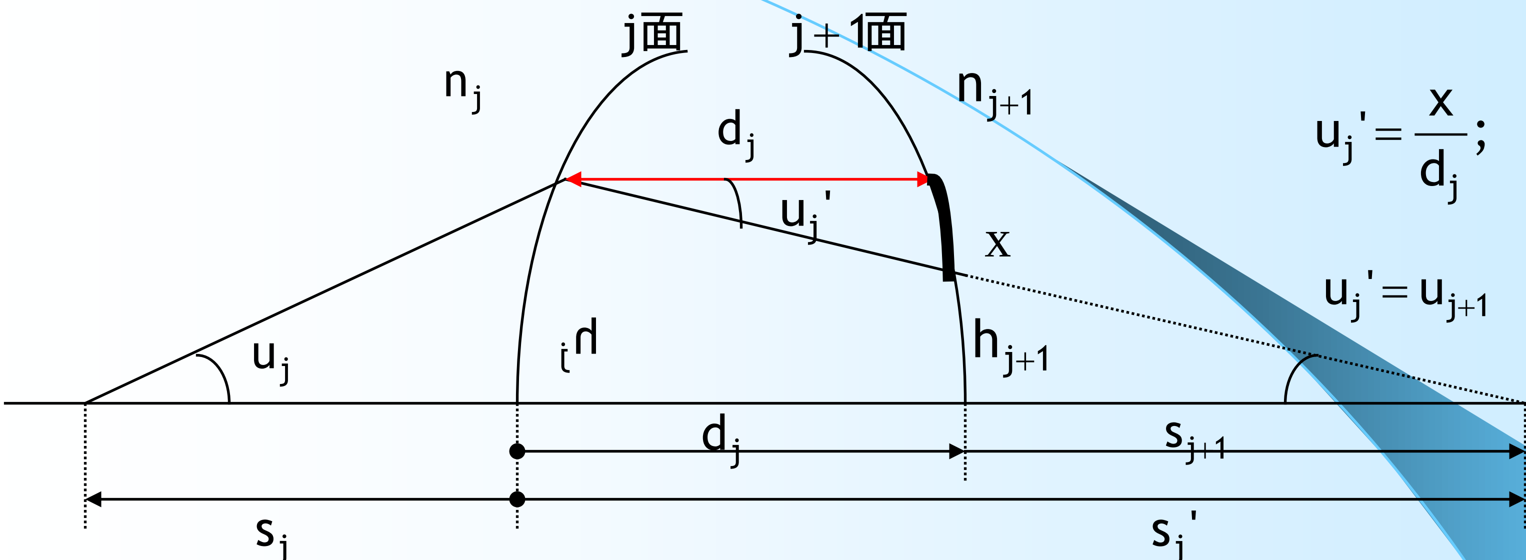
$$\therefore L = -\frac{f}{\beta} - \beta f + 2f + \overrightarrow{HH} = f\left(-\frac{1}{\beta} - \beta + 2\right) + \overrightarrow{HH}$$

$\beta < 0$（実物体実像）の場合、Lの値は$\beta = -1$の時最小

$$L_{min} = 4f + \overrightarrow{HH'}$$

近軸計算(1) -近軸計算式-

物点、像点、主要点の位置の計算法:曲率半径、面間隔、屈折率を利用



$$u_j' = \frac{x}{d_j}; \quad x = u_j' d_j$$

$$u_j' = u_{j+1}$$

$$n_j\left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{s_j}\right) = n_j'\left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{s_j}\right)$$

$$\frac{n_j}{r_j} - \frac{n_j}{s_j} = \frac{n_j'}{r_j} - \frac{n_j'}{s_j'}$$

$$\frac{n_j'}{s_j'} = \frac{n_j' - n_j}{r_j} + \frac{n_j}{s_j}$$

h_jを掛けると

$$\frac{n_j' h_j}{s_j'} = \frac{h_j(n_j' - n_j)}{r_j} + \frac{n_j h_j}{s_j}$$

$\frac{h_j}{s_j} = u_j'$, $\quad \frac{h_j}{s_j} = u_j$より

$$n_j' u_j' = \frac{h_j(n_j' - n_j)}{r_j} + n_j u_j \quad \cdots ①$$

次にj面よりj+1面への移動は

$u_j' = \frac{x}{d_j}$より、$x = d_j u_j'$

$h_{j+1} = h_j - d_j u_j' \cdots ②$

$u_{j+1} = u_j'$および、$n_{j+1} = n_j'$で①と②を交互に使用する。

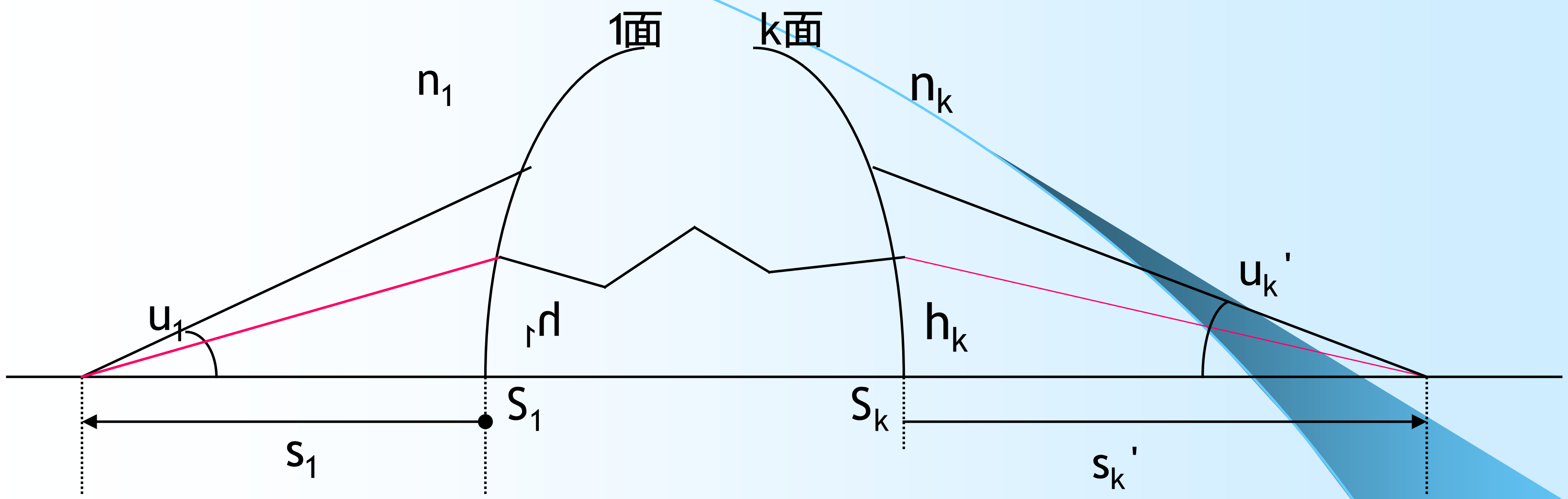
$a_j = n_j u_j$、$a_j' = n_j' u_j'$とし、①②式に、$u_j = \frac{a_j}{n_j}$、$u_j' = \frac{a_j'}{n_j'}$を代入し、

$$\begin{cases} a_j' = \dfrac{h_j(n_j' - n_j)}{r_j} - a_j = a_{j+1} \\ h_{j+1} = h_j - \dfrac{d_j}{n_j'} a_j' \end{cases}$$

空気中では$n_j = n_K' = 1$(Kは最終面)だから$a = u$となる。

近軸計算(2)　-一般式-　物点位置が任意の場合

(1)で求めた最終面のhk,ak’を利用、共役点、主点位置は任意



最終面のh_k、a_k'が求まったので

$$u_k' = \frac{a_k'}{n_k'} \left(\because a_k' = u_k' n_k'\right)$$

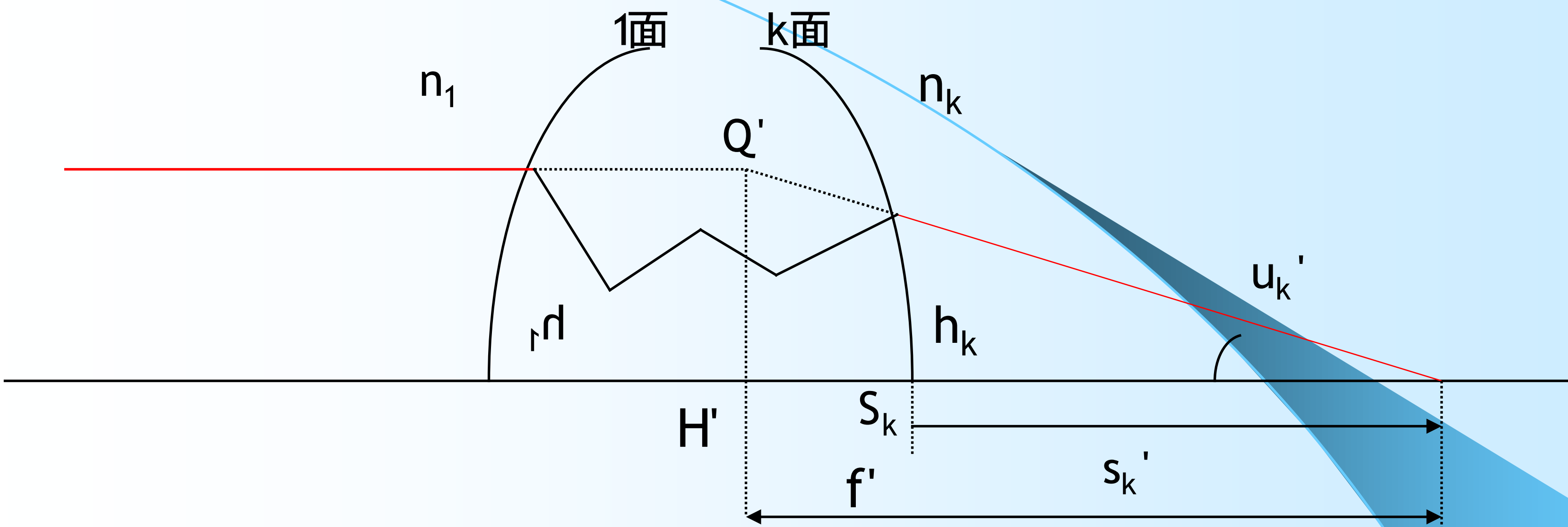
像点位置は

$$s_k' = \frac{h_k}{u_k'} \left(\because u_k' = \frac{h_k}{s_k'}\right)$$

Lagrangeの式より

$$\beta = \frac{n_1}{n_k'}\frac{u_1}{u_k'} \left(\begin{array}{l} \because n_1 u_1 y_1 = n_k' u_k' y_k' \\ \dfrac{n_1 u_1 y_1}{n_k' u_k'} = y_k' \\ \therefore \beta = \dfrac{y_k'}{y_1} = \dfrac{n_1}{n_k'}\dfrac{u_1}{u_k'} \end{array} \right)$$

近軸計算(3)　-物点位置が無限遠の場合-



一般式では共役の位置関係や倍率は主点等に関係なく計算できる。しかし、物点位置が変わる毎に計算をやらなければならない。

→主点、焦点位置を求めて一般式を使用するためには物点位置を無限遠にした計算をする。

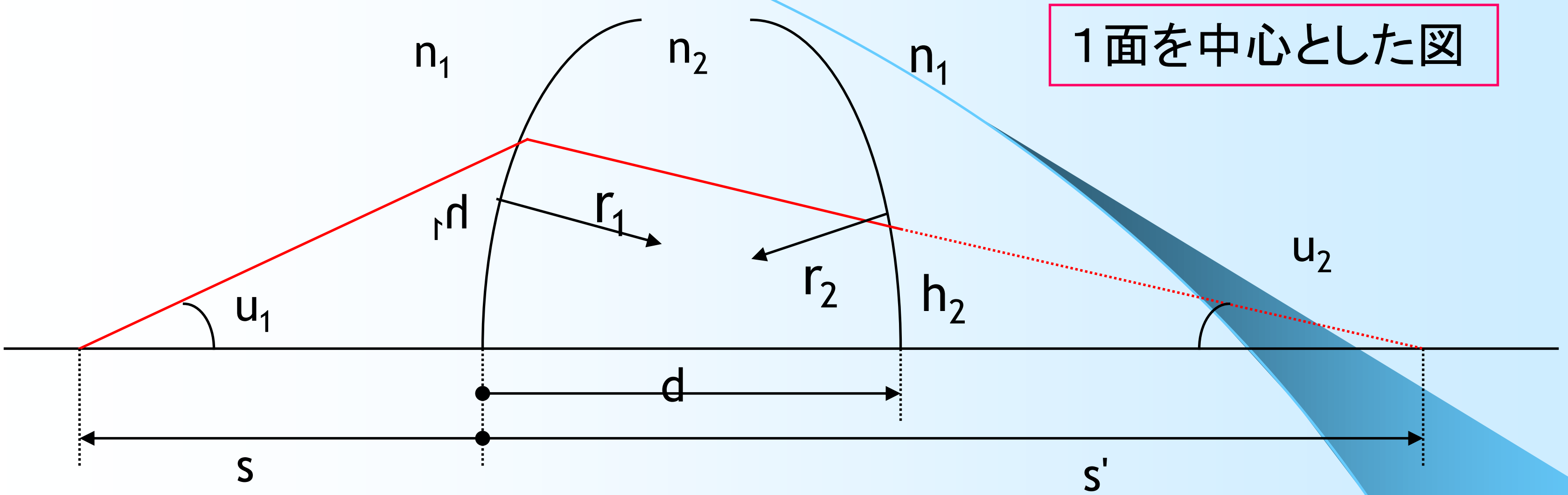
$u_1 = a_1 = 0$、h_1は任意の値

s_k': 後焦点距離(Back focal length)

$f' = \dfrac{h_1}{u_k'}$ (u_k'の値は近軸計算(2)で求まっている)

$\overrightarrow{S_k H'} = s_k' - f'$

単レンズ(1) -一般式-



一般式

$a_1 = u_1 n_1,\ a_2 = u_2 n_2$とすると

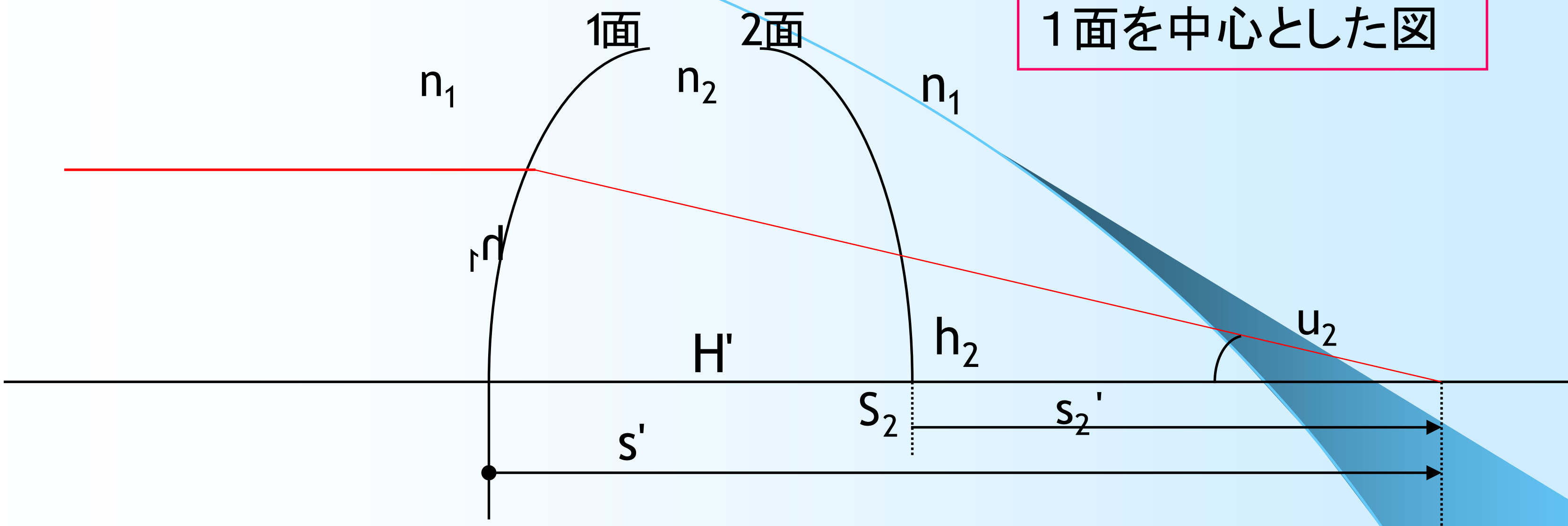
$$\begin{cases} a_2 = a_1 + \dfrac{n_2 - n_1}{r_1} h_1 \\ h_2 = h_1 - \dfrac{d}{n_2} a_2 \end{cases}$$

もっと一般的に書くと

$$\begin{cases} a_{j+1} = a_j + \dfrac{n_{j+1} - n_j}{r_j} h_1 \\ h_{j+1} = h_j - \dfrac{d}{n_{j+1}} a_{j+1} \end{cases}$$

単レンズ(2) -1面目の計算-

1面を中心とした図



$n_1 = 1$（空気中）の時

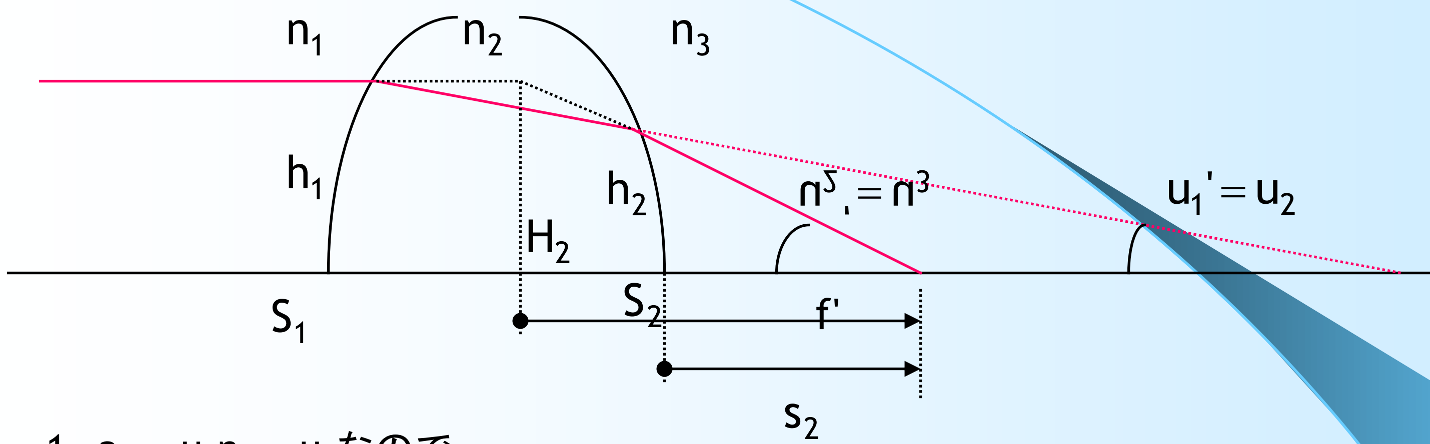
$$\begin{cases} a_2 = a_1 + \dfrac{n_2 - 1}{r_1} h_1 \\ h_2 = h_1 - \dfrac{d}{n_2} a_2 \end{cases}$$

$u_1 = 0$つまり$a_1 = 0$（無限遠からの光が入射）

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{n_2 - 1}{r_1} h_1 \\ h_2 = h_1 - \dfrac{d}{n_2} a_2 \end{cases}$$

$$h_2 = h_1 - \frac{d}{n_2}\frac{n_2 - 1}{r_1} h_1 = h_1 - \frac{dh_1(n_2 - 1)}{r_1 n_2} = \frac{r_1 n_2 h_1 - dh_1(n_2 - 1)}{r_1 n_2}$$

単レンズ(3) -2面目を合わせた主点屈折力と焦点距離(i)-



$n_3 = 1$、$a_3 = u_3 n_3 = u_3$なので

$$a_3 = a_2 + \frac{n_3 - n_2}{r_2}h_2 = \frac{n_2 - 1}{r_1} + \frac{1 - n_2}{r_2}h_2$$ ・・・* 近軸計算(1)の式参照

ここで

$$\frac{1-n_2}{r_2}h_2 = \frac{1-n_2}{r_2} \bullet \frac{r_1 n_2 h_1 - d h_1 (n_2 - 1)}{r_1 n_2} = \frac{(1-n_2) r_1 n_2 h_1 + d h_1 (1-n)^2}{r_1 r_2 n_2} = \frac{h_1 \left\{(1-n_2) r_1 n_2 + d(1-n_2)^2\right\}}{r_1 r_2 n_2}$$

よって

$$a_3 = \frac{h_1 (n_2 - 1)}{r_1} + \frac{h_1 \left\{(1-n_2) r_1 n_2 + d(1-n_2)^2\right\}}{r_1 r_2 n_2} = \frac{r_2 n_2 h_1 (n_2 - 1) + h_1 \left\{(1-n_2) r_1 n_2 + d(1-n_2)^2\right\}}{r_1 r_2 n_2}$$

$$= \frac{-r_2 n_2 h_1 (1-n_2) + h_1 \left\{(1-n_2) r_1 n_2 + d(1-n_2)^2\right\}}{r_1 r_2 n_2} = \frac{h_1 \left\{-r_2 n_2 (1-n_2) + r_1 n_2 (1-n_2) + d(1-n_2)^2\right\}}{r_1 r_2 n_2}$$

$$= \frac{h_1 \left\{(1-n_2)(r_1 n_2 - r_2 n_2) + d(1-n_2)^2\right\}}{r_1 r_2 n_2}$$

単レンズ(4) -2面目を合わせた主点屈折力と焦点距離(ii)-

$$f' = \frac{h_1}{u_3}, \quad u_3 = a_3 (\because a_3 = u_3 n_3, \quad n_3 = 1) \quad \cdots$$ ＊近軸計算(3)の式参照

$$\therefore \frac{1}{f'} = \frac{u_3}{h_1} = \frac{a_3}{h_1}$$

$$= \frac{n_2(1-n_2)(r_1-r_2)+d(1-n_2)^2}{r_1 r_2 n_2} = \frac{(1-n_2)(r_1-r_2)}{r_1 r_2} + \frac{d(1-n_2)^2}{r_1 r_2 n_2} = (1-n_2)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) + \frac{d(1-n_2)^2}{r_1 r_2 n_2}$$

$$= (n_2-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) + \frac{d(1-n_2)^2}{n_2 r_1 r_2}$$

$$= (n_2-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) + \frac{d}{n_2} \bullet \frac{n_2-1}{r_1} \bullet \frac{n_2-1}{r_2} = \frac{n_2-1}{r_1} + \frac{1-n_2}{r_2} - \frac{d}{n_2} \bullet \frac{n_2-1}{r_1} \bullet \frac{n_2-1}{r_2}$$

主点屈折力(F)は、$D_1 = \frac{n_2-1}{r_1}, \quad D_2 = \frac{1-n_2}{r_2}$とすると

$$F = \frac{1}{f'} = D_1 + D_2 - \frac{d}{n_2} \bullet D_1 D_2$$

主点焦点距離(f)は

$$f = \frac{r_1 r_2 n_2}{n_2(1-n_2)(r_1-r_2)+d(1-n_2)^2}$$

単レンズ(5) -2面目を合わせた後頂点距離と屈折力-

後頂点距離(S_k')は

$$s_k' = \frac{h_2}{u_3} = \frac{h_2}{a_3} \quad \cdots \text{* 近軸計算(2)の式参照}$$

$$= \frac{h_1 - \dfrac{d}{n_2} a_2}{\dfrac{h_1\left\{(1-n_2)(r_1 n_2 - r_2 n_2) + d(1-n_2)^2\right\}}{r_1 r_2 n_2}} = \frac{\{r_1 n_1 h_1 - d h_1 (n_2 - 1)\} r_1 r_2 n_2}{r_1 n_2 h_1 \left\{(1-n_2)(r_1 n_2 - r_2 n_2) + d(1-n_2)^2\right\}} = \frac{r_2 h_1 \{r_1 n_2 - d(n_2 - 1)\}}{h_1 \left\{(1-n_2)(r_1 n_2 - r_2 n_2) + d(1-n_2)^2\right\}}$$

$$= \frac{r_2 \{r_1 n_2 - d(n_2 - 1)\}}{(1-n_2)(r_1 n_2 - r_2 n_2) + d(1-n_2)^2} = \frac{r_2 \{r_1 n_2 - d(n_2 - 1)\}}{n_2 (1-n_2)(r_1 - r_2) + d(1-n_2)^2}$$

後頂点屈折力(Sv')は

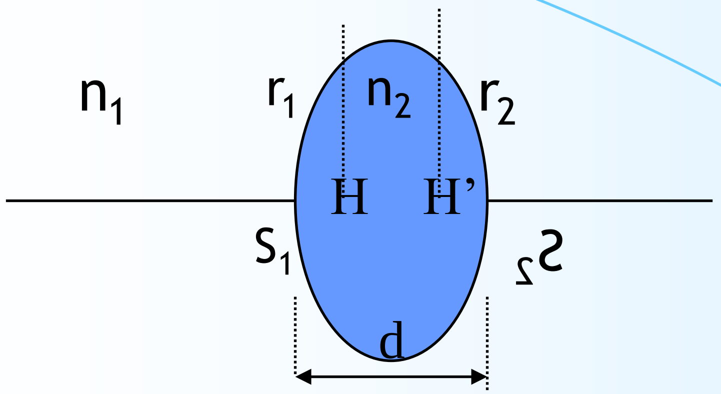
$$Sv' = \frac{n_2(1-n_2)(r_1 - r_2) + d(1-n_2)^2}{r_2\{r_1 n_2 - d(n_2-1)\}} = \frac{\left\{n_2(1-n_2)(r_1 - r_2) + d(1-n_2)^2\right\} n_2 r_1}{n_2 r_1 r_2 \{r_1 n_2 - d(n_2 - 1)\}} = \frac{n_2(n_2-1)(r_2 - r_1) + d(n_2-1)^2}{n_2 r_1 r_2} \div \frac{n_2 r_1 - d(n_2 - 1)}{n r_1}$$

$$= \frac{(n_2 - 1)\left(\dfrac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right) + \dfrac{d(n_2-1)^2}{n_2 r_1 r_2}}{1 - \dfrac{d(n_2-1)}{n_2 r_1}} = \frac{(n_2 - 1)\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right) + \dfrac{d(n_2-1)^2}{n_2 r_1 r_2}}{1 - \dfrac{d}{n_2} \bullet \dfrac{n_2 - 1}{r_1}}$$

$\dfrac{n_2 - 1}{r_1} = D_1$とすると

$$Sv' = \frac{D_1 + D_2 - \dfrac{d}{n_2} \bullet D_1 D_2}{1 - \dfrac{d}{n_2} \bullet D_1}$$

単レンズ(6) -主点、後頂点間距離-



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{S_2H'} &= f' - s_k' \\
&= \frac{r_1 r_2 n_2 - r_2\{r_1 n_2 - d(n_2 - 1)\}}{n_2(1-n_2)(r_1 - r_2) + d(1-n_2)^2} = \frac{dr_2(n_2 - 1)}{n_2(1-n_2)(r_1 - r_2) + d(1-n_2)^2} \\
&= \frac{-dr_2(n_2 - 1)}{-(1-n_2)\{n_2(r_1 - r_2) + d(1-n_2)\}} = \frac{dr_2}{-\{n_2(r_1 - r_2) + d(1-n_2)\}} \\
&= \frac{r_2 d}{n_2(r_2 - r_1) + d(n_2 - 1)}
\end{aligned}
$$

同様にして$\overrightarrow{S_1H}$を求めると

$$
\overrightarrow{S_1H} = \frac{r_1 d}{n(r_2 - r_1) + d(n_2 - 1)}
$$

単レンズ(7) -凸平レンズ、凹平レンズ-

$$r_2 \to \infty ならば \frac{1}{r_2} = 0$$

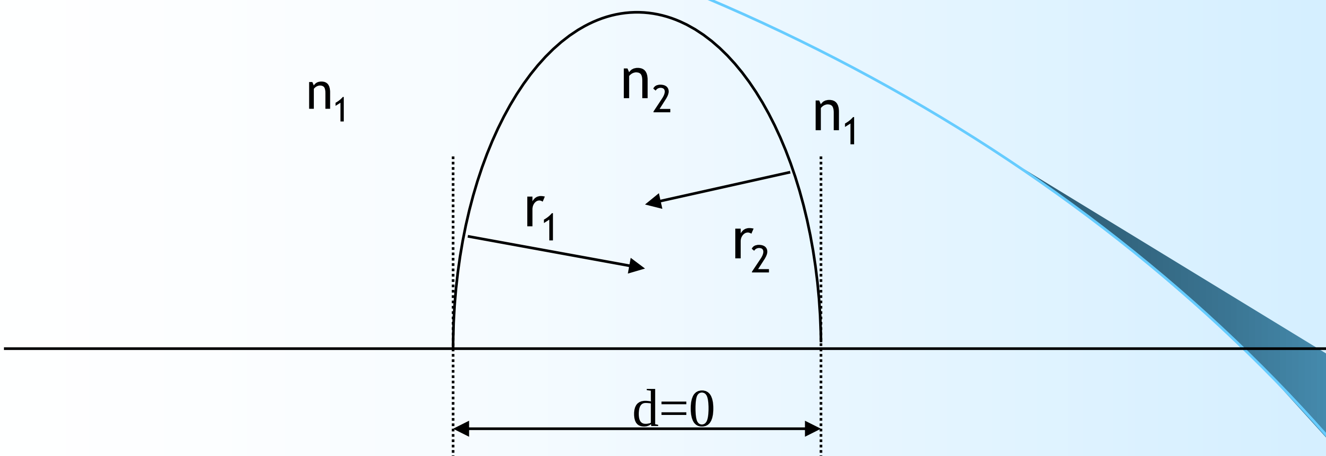
$$R = \frac{1}{r_2} とすると r_2 = \frac{1}{R}$$

$$\therefore \overrightarrow{S_2H} = \frac{\frac{d}{R}}{n\left(\frac{1}{R} - r_1\right) + (n-1)d} = -\frac{\frac{d}{R}}{\frac{n}{R} - r_1 n + nd - d} = -\frac{\frac{d}{R}}{\frac{n - r_1 nR + ndR - dR}{R}} = -\frac{d}{n - r_1 nR + ndR - dR}$$

$$R \to 0 のとき$$

$$\overrightarrow{S_2H} = -\frac{d}{n}$$

単レンズ(8) -薄肉レンズの屈折力-



$$\frac{1}{f'} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{(1-n_2)^2 d}{n_2 r_1 r_2}$$（＊単レンズ(1)のページより）において$d=0$とすると

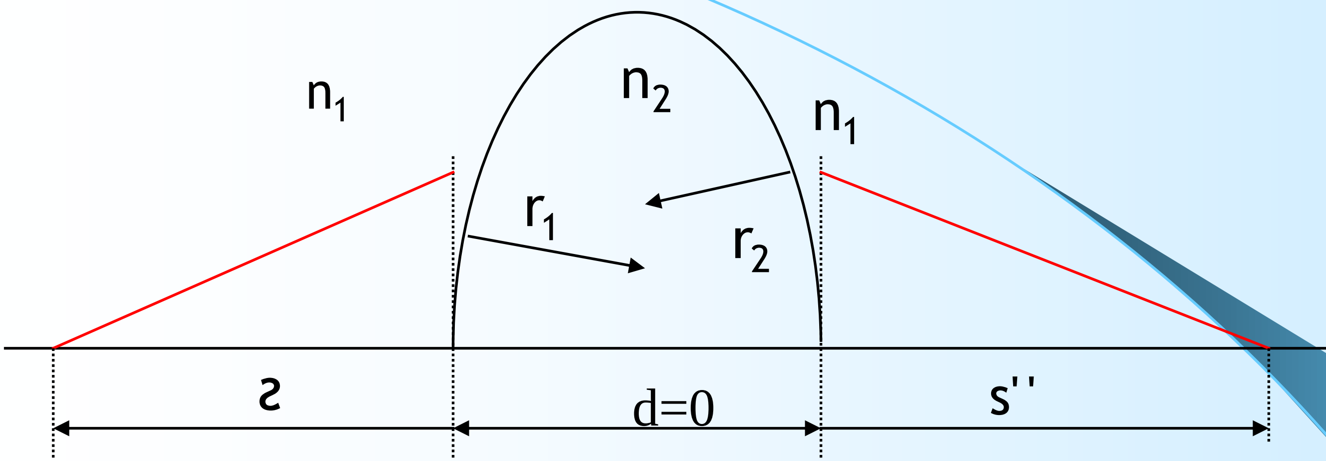
$$\frac{1}{f'} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$…屈折力（パワー）

$\frac{1}{r_1} = c_1 \quad \frac{1}{r_2} = c_2$とすると

$$\phi = (n_2 - 1)(c_1 - c_2) = (n-1)c_1 + (1-n)c_2$$

$(n-1)c_1$、$(1-n)c_2$を面パワーという

単レンズ(9) -薄肉レンズの結像公式-



Abbeの式を薄肉レンズに２回用いると

１面目

$$n_1\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s}\right)=n_2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s'}\right)$$

$$\frac{n_1}{r_1}-\frac{n_1}{s}=\frac{n_2}{r_1}-\frac{n_2}{s'}$$

$$\frac{n_1}{s'}=\frac{n_2-n_1}{r_1}+\frac{n_1}{s}$$

２面目

$$\frac{n_1}{s''}=\frac{n_1-n_2}{r_2}+\frac{n}{s'}$$

$$=\frac{n_1-n_2}{r_2}+\frac{n_2-n_1}{r_1}+\frac{n_1}{s}=-\frac{n_2-n_1}{r_2}+\frac{n_2-n_1}{r_1}+\frac{n_1}{s}$$

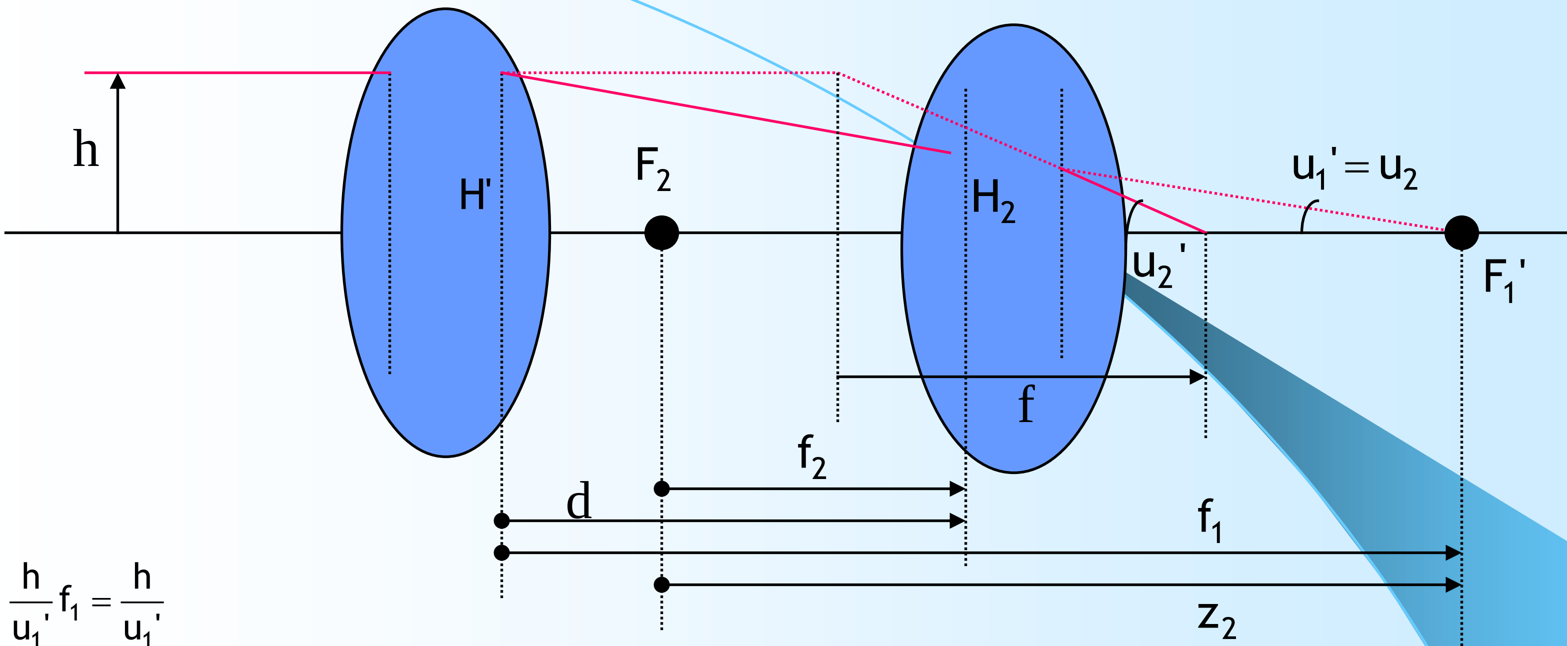
$$=(n_2-n_1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)+\frac{n_1}{s}$$

$n=1$より

$$\frac{1}{s''}=(n_2-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)+\frac{1}{s}$$

薄肉レンズでは両面および２つの主点が全て１点に重なっている。

2つのレンズ系の合成(1) –主点屈折力



$f_1 = \dfrac{h}{u_1'}$ $f_1 = \dfrac{h}{u_1'}$

Lagrangeの式より

$u_2 y_2 = u_2' y_2'$

$\beta_2 = \dfrac{y_2'}{y_2} = \dfrac{u_2}{u_2'} = \dfrac{u_1'}{u_2'}$　よって$u_2' = \dfrac{u_1'}{\beta_2}$　…①

合成レンズの焦点は

$f = \dfrac{h}{u_2'}$

①を代入

$f = \dfrac{h}{u_2} = \dfrac{h}{\dfrac{u_1'}{\beta}} = \dfrac{h\beta_2}{u_1'} = f_1\beta_2$　…②

よって、第１レンズのf_1に第２レンズの倍率を掛ければ合成のfとなる。

次に第１、第２レンズの焦点距離f_1, f_2、第１レンズの像側主点H_1'と第２レンズの物体側主点H_2間の距離dが分かっている場合。

$z_2 = f_2 - d + f_1$

F'はf_2の虚物点であるので

$\beta_2 = \dfrac{f_2}{z_2} = \dfrac{f_2}{f_1 + f_2 - d}$　…③

2つのレンズ系の合成(2) –主点屈折力

③を②に代入すると

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} \quad \cdots ④$$

$$\therefore \frac{1}{f} = \frac{f_1 + f_2 - d}{f_1 f_2} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

$$\therefore D = D_1 + D_2 - dD_1D_2$$

レンズ間の距離によって分類

１． $d = 0$のとき

$$D = D_1 + D_2$$

２． $d = f_1$のとき（④に代入）

$f = f_1$　：第２レンズの焦点距離は関係なくなる

$$D = D_1$$

３． $d = 2f_1$のとき

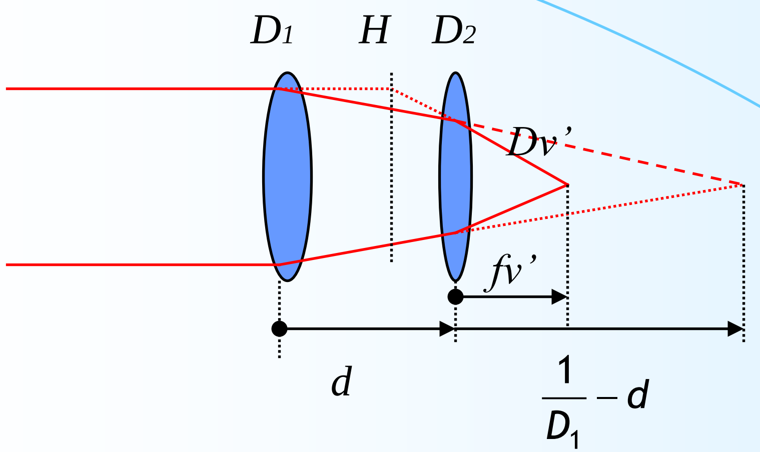
$$f = \frac{f_1 f_2}{f_2 - f_1}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{f_2 - f_1}{f_1 f_2} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2}$$

$D = D_1 - D_2$　：第２レンズの屈折力を第１レンズの屈折力から引く

４． $f_1 + f_2 > d > f_1$のとき$f > 0$　$\rightarrow$ 正レンズ

2つのレンズ系の合成(3) –頂点屈折力



第２頂点屈折力(Dv')を求める

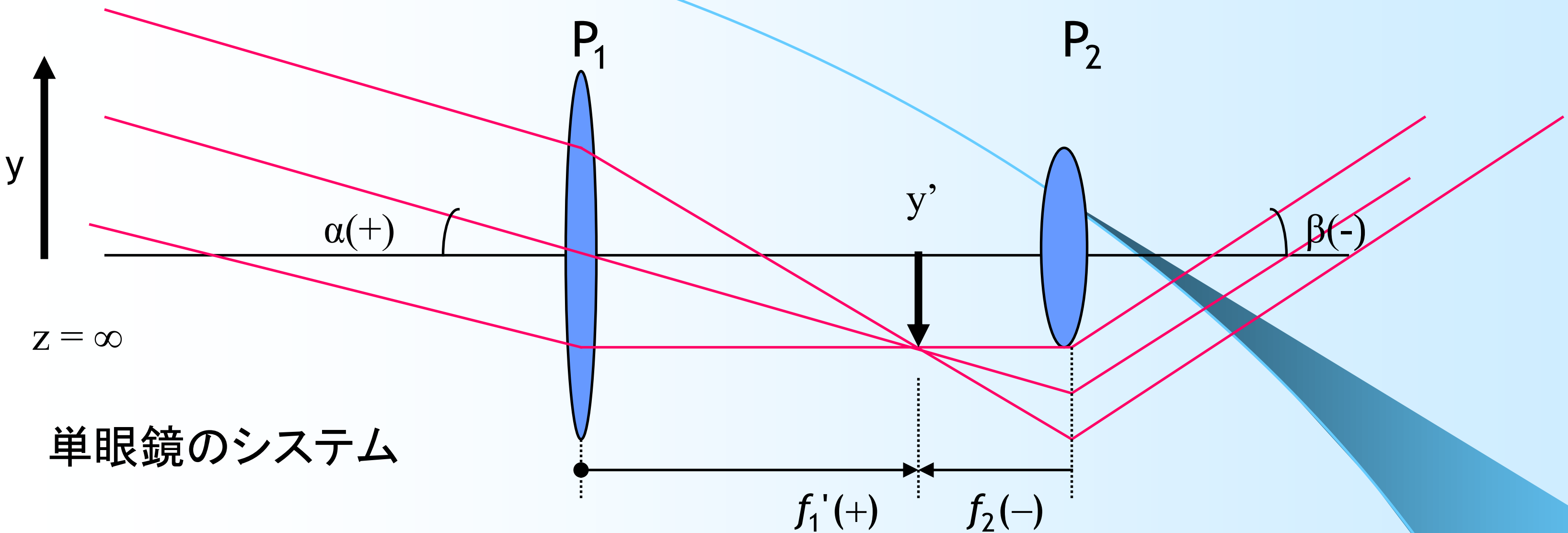
$$Dv' = \frac{1}{\frac{1}{D_1} - d} + D_2 = \frac{1}{\frac{1 - dD_1}{D_1}} + D_2 = \frac{D_1}{1 - dD_1} + D_2 = \frac{D_1 + D_2(1 - dD_1)}{1 - dD_1}$$

$$= \frac{D_1 + D_2 - dD_1D_2}{1 - dD_1} = \frac{D}{1 - dD_1}$$

同様にして第１頂点屈折力(Dv)を求めると

$$Dv = \frac{D_1 + D_2 - dD_1D_2}{1 - dD_2} = \frac{D}{1 - dD_2}$$

アフォーカル系(1) -単眼鏡- 無限遠物体、角倍率



単眼鏡のシステム

角倍率

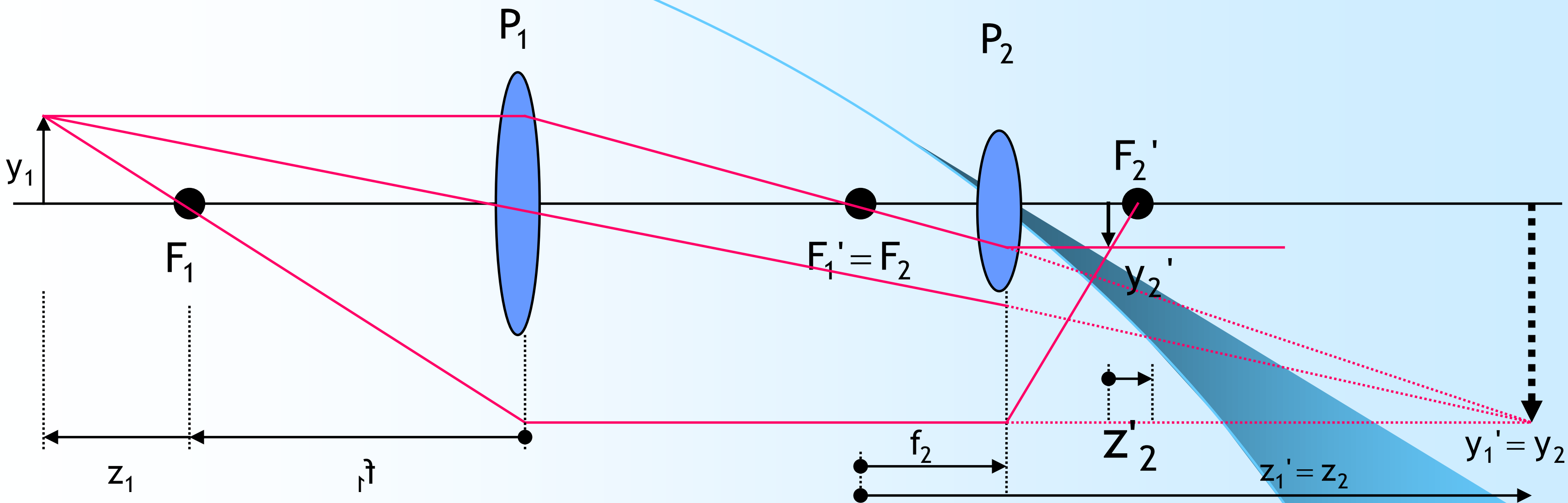
P_1の第２焦点距離をf_1'、P_2の第１焦点距離をf_2とすると

$$m = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{\frac{y'}{f_2}}{\frac{y'}{f_1'}} = -\frac{f_1'}{f_2'}$$

$P_1 = \frac{1}{f_1'},\ P_2 = \frac{1}{f_2'}$とすると

$$m = -\frac{P_2}{P_1}$$

アフォーカル系(2) –単眼鏡- 有限物体



(有限物体の結像)

対物レンズf_1に関するNewtonの式

$$z_1 z_1' = -f_1^{\,2} \left(f_1 = f_1' \quad \because n = n' = 1\right)$$

$$z_1' = -\frac{f_1^{\,2}}{z_1} \quad \cdots ①$$

接眼レンズf_2に関するNewtonの式

$$z_2 z_2' = -f_2^{\,2}$$

$z_1' = z_2$(z_1'はP_2の虚物点となり、P_2に関するz_2である)

$$\therefore z_1' z_2' = -f_2^{\,2}$$

$$z_2' = -\frac{f_2^{\,2}}{z_1'}$$

①を代入して

$$z_2' = \frac{-f_2^{\,2}}{-\dfrac{f_1^{\,2}}{z_1}} = \frac{f_2^{\,2}}{f_1^{\,2}} z_1 = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 z_1 = \frac{z_1}{m^2} \quad \cdots ②$$

物点像点はそれぞれF_1、F_2'よりとると、その距離はm^2に逆比例する。

(アフォーカル倍率(角倍率)を$m = -\dfrac{f_1}{f_2}$とする)

アフォーカル系(3) –単眼鏡- 有限物体、横倍率

横倍率

f_1の横倍率をβ_1、f_2の横倍率をβ_2とする。

$$\beta_1 = \frac{y_1'}{y_1} = \frac{f_1}{z_1}$$

$$\beta_2 = \frac{y_2'}{y_1'} = -\frac{f_2}{z_2} = -\frac{z_2'}{f_2}$$

アフォーカル系全体の倍率βは

$$\beta = \beta_1\beta_2 = -\frac{f_1}{z_1}\frac{z_2'}{f_2} = -\frac{f_1}{f_2}\frac{z_2'}{z_1}$$

$z_2' = \dfrac{z_1}{m^2}$ (*アフォーカル系(1)のページより）だから

$$\beta = -\frac{f_1}{f_2}\frac{\frac{z_1}{m^2}}{z_1} = -\frac{f_1}{f_2}\frac{1}{m^2} = m\frac{1}{m^2} = \frac{1}{m}$$

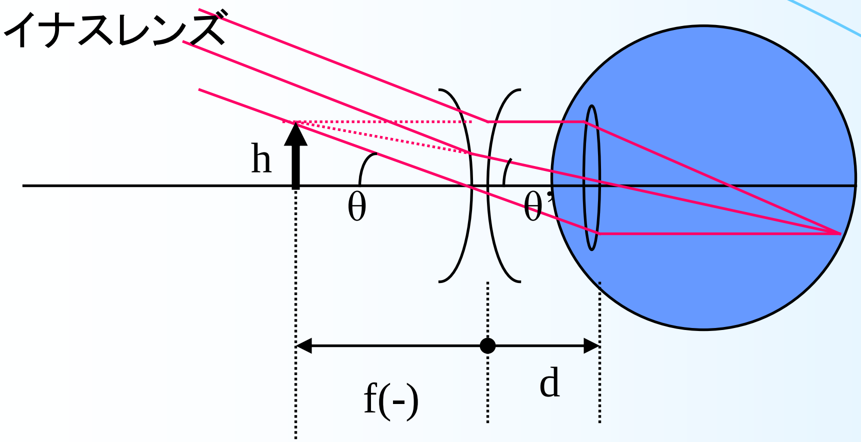
つまり、像倍率は物体像位置とは関係なくmのみで決まる。

遠用矯正レンズの倍率

- Spectacle magnification(S.M.)
  裸眼の網膜像の大きさに対する、矯正眼の網膜像の大きさの比。網膜像の大きさは入射瞳（角膜後方3mm）を基準にする。
- Relative spectacle magnification(R.S.M)
  標準的正視眼の網膜像の大きさに対する、矯正眼の網膜像の大きさの比で、屈折異常が軸性か屈折性かで異なる。

Spectacle magnification(S.M) –薄いレンズ

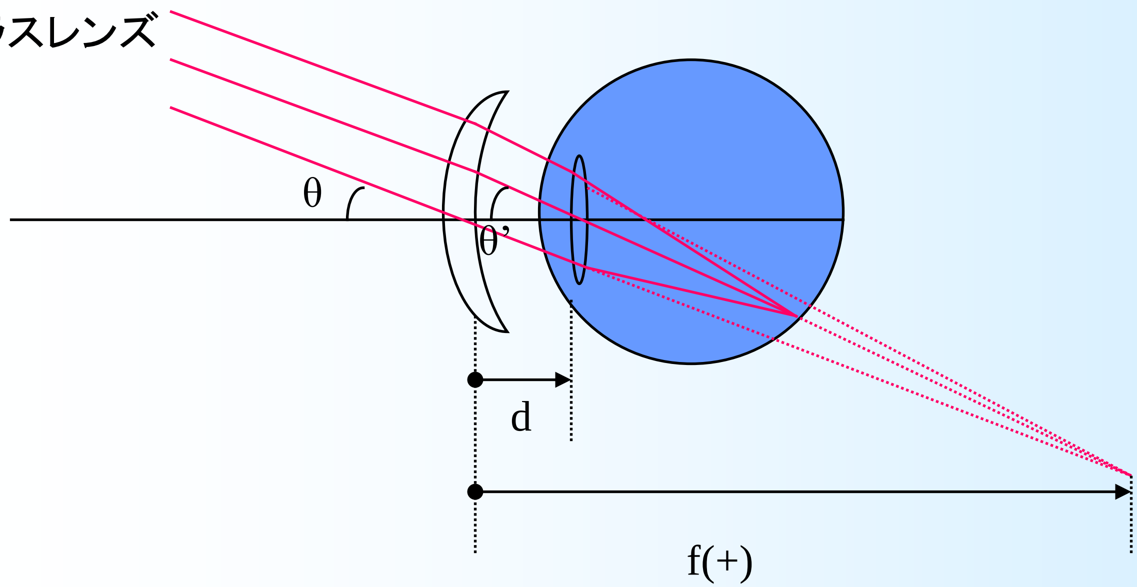
マイナスレンズ



$$\frac{\theta'}{\theta}=\frac{\tan\theta'}{\tan\theta}=\frac{\dfrac{h}{d-f'}}{\dfrac{h}{-f'}}=\frac{-f'}{d-f'}=\frac{1}{1-\dfrac{d}{f'}}$$

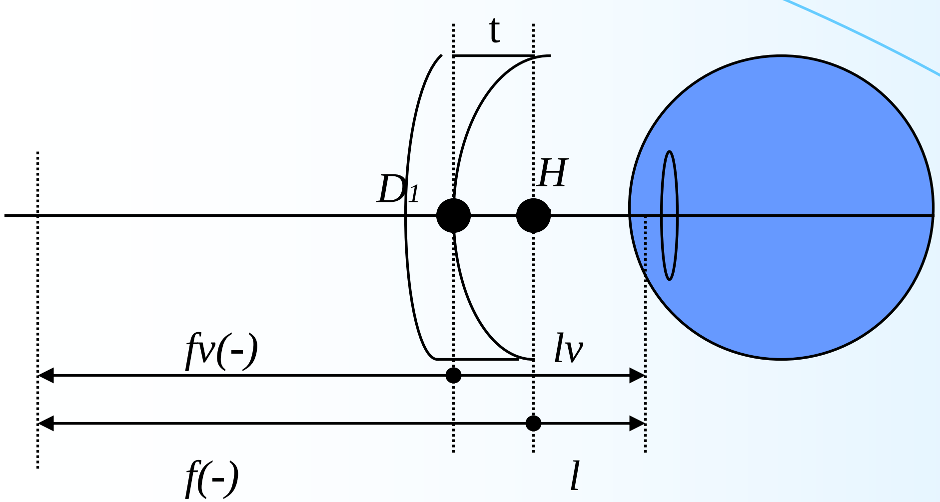
$$=\frac{1}{1-dD}$$

プラスレンズ



(ロービジョンケアマニュアルより)

Spectacle magnification(S.M) –厚いレンズ



$$l = l_v + \frac{1}{D} - \frac{1}{D_v'}\text{および}D_v' = M_s D\text{より}\left(M_s(Shape\ factor) = 1 - \frac{t}{n}D_1 \right)$$

$$S.M = \frac{1}{1-lD} = \frac{1}{1-\left(l_v + \frac{1}{D} - \frac{1}{D_v'}\right)D} = \frac{1}{1-\left(l_v + \frac{1}{D} - \frac{1}{M_s D}\right)D} = \frac{1}{1-\left(l_v + 1 + \frac{1}{M_s}\right)} = \frac{1}{-l_v D + \frac{1}{M_s}}$$

$$= \frac{1}{\frac{-l_v D M_s + 1}{M_s}} = \frac{M_s}{-l_v D M_s + 1} = M_s \frac{1}{1 - l_v D M_s} = M_s \frac{1}{1 - l_v D_v'}$$

$$M_p(Power\ factor) = \frac{1}{1 - l_v D_v'}\text{とすると}$$

$$S.M. = M_s M_p$$

(ロービジョンケアマニュアルより)

Relative spectacle magnification(R.S.M)

R.S.M.の定義

$$R.S.M.=\frac{(\text{矯正レンズ＋屈折異常眼合成光学系）の主点焦点距離}}{\text{正視モデル眼の主点焦点距離}}$$

$$=\frac{\text{正視モデル眼の主点屈折力}}{\text{（矯正レンズ＋屈折異常眼合成光学系）の主点屈折力}}$$

$$=\frac{D_0}{D_{com}}=\frac{D_0}{D_r+D_l-lD_0D_l}$$

軸性屈折異常眼の場合：$D_r=D_0$だから、$f_0=-1/D_0=-1/60\fallingdotseq-0.017$

$$R.S.M.=\frac{D_0}{D_0+D_L-lD_0D_L}=\frac{1}{1-(l-0.017)D_L}$$

$l=-f_0$（矯正レンズが眼の物側焦点位置、角膜頂点から約15mm）に装用したとき、

$R.S.M.=1$、軸性屈折異常眼の網膜像は正視モデル眼と等しくなる。

屈折性屈折異常眼の場合：矯正レンズと屈折異常眼からなる合成光学系の後側頂点屈折力($D_{com}v'$)が正視モデル眼の屈折力D_0と等しい。

$$D_{com}v'=\frac{D_r+D_L-lD_rD_L}{1-lD_L}=\frac{D_{com}}{1-lD_L}=D_0$$

$$R.S.M.=\frac{D_0}{D_{com}}=\frac{\frac{D_{com}}{1-lD_L}}{D_{com}}=\frac{1}{1-lD_L}$$

$l=0$（矯正レンズが眼の物側主点位置、角膜頂点後方から約1.3mm）に装用したとき、

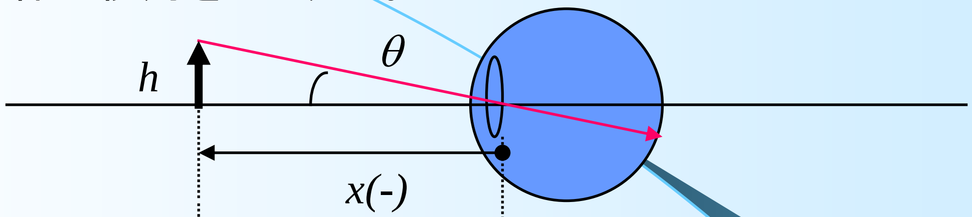
$R.S.M.=1$、屈折性屈折異常眼の網膜像は正視モデル眼と等しくなる。

(ロービジョンケアマニュアルより)

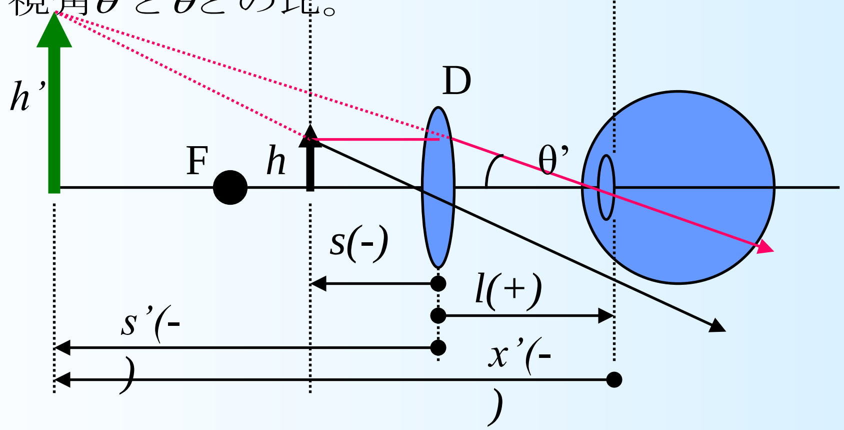
近用眼鏡のS.M.n(1)

倍率は物体hによる視角θと虚像h'による視角θ'の比である角倍率

1） 距離xにおける物体の視角をθとする。



2)虚像h'による視角θ'とθとの比。



$x = s - l, x' = s' - l$とすると倍率mは

$$m = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\tan\theta'}{\tan\theta} = \frac{\dfrac{y'}{s'-l}}{\dfrac{y}{s-l}} = \frac{y'}{y} \bullet \frac{s-l}{s'-l}$$

またレンズの結像公式から$s' = \dfrac{1}{\dfrac{1}{s}+D}$だから、$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{s'}{s}$に留意すると

$$m = \frac{1}{1+sD} \bullet \frac{s-l}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{s}+D}} = \frac{s-l}{s-l(1+sD)}$$

$s = \dfrac{1}{S}$より

$$m = \frac{\dfrac{1}{S}-l}{\dfrac{1}{S}-l\left(1+\dfrac{D}{S}\right)} = \frac{\dfrac{1-lS}{S}}{\dfrac{1}{S}-l\left(\dfrac{S+D}{S}\right)} = \frac{\dfrac{1-lS}{S}}{\dfrac{1}{S}-\left(\dfrac{l(S+D)}{S}\right)} = \frac{\dfrac{1-lS}{S}}{\dfrac{1-l(S+D)}{S}}$$

$$= \frac{1-lS}{1-l(S+D)}$$

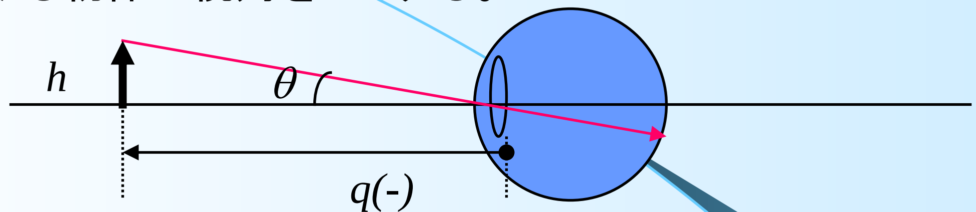
遠用眼鏡の場合$S=0$となり、遠用矯正レンズの倍率に等しくなる。

(ロービジョンケアマニュアルより)

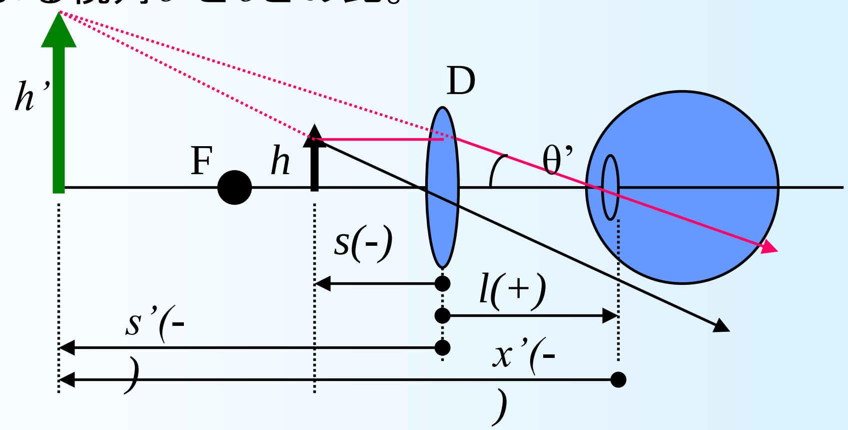
近用眼鏡R.S.M.n(2)

倍率は物体hによる視角θと虚像h'による視角θ'の比である角倍率

１） 基準距離qにおける物体の視角をθとする。



２） 虚像h'による視角θ'とθとの比。



$x=-l, x'=s'-l$とすると倍率mは

$$m=\frac{\theta'}{\theta}=\frac{\tan\theta'}{\tan\theta}=\frac{\dfrac{y'}{s'-l}}{\dfrac{y}{q}}=\frac{y'}{y}\bullet\frac{q}{s'-l}=\frac{y'}{y}\bullet\frac{s-l}{s'-l}\bullet\frac{q}{s-l}$$

ここで$\dfrac{y'}{y}$はレンズの横倍率、$\dfrac{q}{s'-l}$は像の位置による倍率変化を、

また$\dfrac{y'}{y}\bullet\dfrac{s-l}{s'-l}$はS.Mを、$\dfrac{q}{s-l}$は物体位置による倍率の変化を表している。

$D.M=\dfrac{q}{s-l}$とすると

$$R.S.M \fallingdotseq S.M\times D.M$$

$$=\frac{1-lS}{1-l(S+D)}\bullet\frac{q}{s-l}=\frac{1-lS}{1-l(S+D)}\bullet\frac{q}{\dfrac{1}{S}-D}=\frac{1-lS}{1-l(S+D)}\bullet\frac{q}{\dfrac{1-lS}{S}}$$

$$=\frac{qS}{1-l(S+D)}$$

近用眼鏡の相対眼鏡倍率＝（レンズの効果）×（距離による効果）

(ロービジョンケアマニュアルより)

R.S.M.nの計算

レンズ前方4cmに物体を置き、レンズと眼の距離を20cmにして使用する20D（表示倍率5倍）のスタンドルーペの実際の倍率はいくらか。

・基準距離を30cmとする

・表示倍率を得るにはレンズと眼の距離をいくらにすればよいか。

・近用加入度はそれぞれいくら必要か。

<解答>

レンズ前方4cm(S=-1/0.04=-25D)にある物体の像はレンズ前方20cm(S’=S+D=-25+20=-5D s’=-1/5=-0.2m)。

よって、倍率は公式より

$$R.S.M = \frac{S}{3.33} \bullet \frac{1}{1 - l(S + D)} = \frac{-25}{3.33} \bullet \frac{1}{1 - 0.20(-5)} = 3.75$$

この場合、像は眼前20+20=40cmにあるので近用加入度は1/0.4=2.5D

倍率を5倍にするには

$-\frac{-25}{3.33} \bullet \frac{1}{1 - l(-5)} = 5$となり、$l = 0.1m$

よってレンズと眼の距離を$10cm$にして使用すると5倍になる。

この場合、像は眼前$20 + 10 = 30cm$にあるので近用加入度は$1/0.3 = 3.3D$。

(ロービジョンケアマニュアルより)

ルーペの倍率(1)

$$R.S.M = S.M \times D.M = \frac{qS}{1-l(S+D)} \cdots \text{近用眼鏡の倍率}$$

１）像を無限遠方に作って見る場合の倍率（基準距離25cm)

物体をレンズの物側焦点に置くと、その像は無限遠方にできる。このとき、R.S.M式に、S=1/s=1/(-f’)=-Dを代入すると

$$R.S.M = \frac{D}{4} \bullet \frac{1}{1-l(-D+D)} = \frac{D}{4}$$

２）眼をレンズの像側焦点に置いて見る場合の倍率(基準距離25cm)

レンズの像側焦点F’を眼の入射瞳Eに一致させると、F’を通る光線が主光線となり、視覚θ’は一定となる。従って倍率は常に同一となる。

$$R.S.M = -\frac{S}{4} \bullet \frac{1}{1-l(S+D)} = \frac{S}{4} \bullet \frac{1}{1-\frac{1}{D}(S+D)} = -\frac{S}{4} \bullet \frac{1}{-\frac{S}{D}} = \frac{D}{4}$$

（ロービジョンケアマニュアルより）

ルーペの倍率(2)

$$R.S.M = S.M \times D.M = \frac{qS}{1 - l(S + D)}$$

３）レンズを眼に近付け像を基準の位置に作って見る場合：

像h’が基準距離（$s' = q = -0.25$m)にできるように物体を焦点位置Fの内側に置きレンズを眼に密着させて($l=0$)見ると、レンズの中心を通る光線が主光線とみなせる。

$l=0,\ S+D=S'=-4D$をR.S.Mの式に代入すると

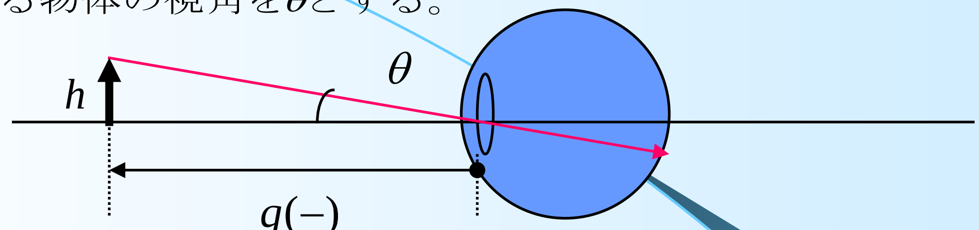
$$R.S.M = -\frac{S}{4} \bullet \frac{1}{1 - l(S + D)} = \frac{-4 - D}{4} \bullet \frac{1}{1 - 0(S + D)} = 1 + \frac{D}{4}$$

（ロービジョンケアマニュアルより）

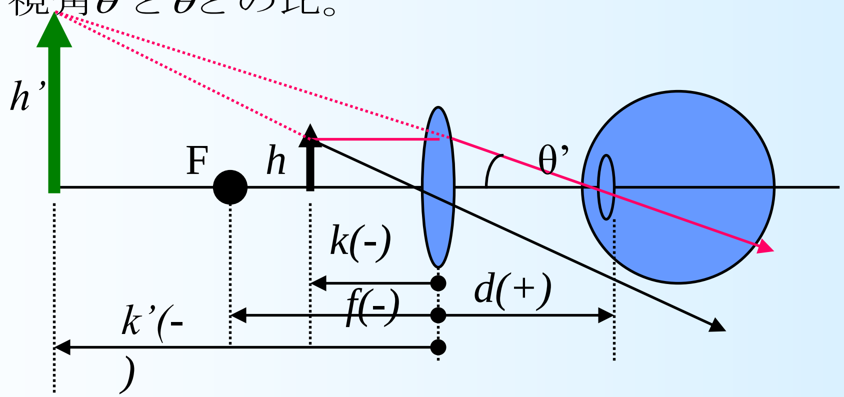
ルーペの倍率(3) -別解

ルーペの倍率は物体*h*による視角θと虚像*h'*による視角θ'の比である角倍率

1） 基準距離qにおける物体の視角をθとする。



2)虚像h'による視角θ'とθとの比。



$k=\frac{1}{L}, k'=\frac{1}{L'}$とするとルーペの倍率$m$は

$$m=\frac{\theta'}{\theta}=\frac{\tan\theta'}{\tan\theta}=\frac{h'}{d-k'}\div\frac{h}{-q}=\frac{h'}{h}\bullet\frac{-q}{d-k'}=\frac{-k'}{-k}\bullet\frac{-q}{d-k'}=\frac{L}{L'}\bullet\frac{-q}{d-k'}=\frac{L}{L'}\bullet\frac{-q}{d-\frac{1}{L'}}=\frac{qL}{-L'd+1}=\frac{qL}{1-L'd}$$

ここで、焦点F上に物体があると

$L'=0, (-k'=\infty), L=-F$となり、$M=qL=-qF$

$q=-0.25m$とすると

$M=-(-0.25)F=\frac{F}{4}$ $\cdots$ルーペの基準拡大率($NIKON, ZEISS, SPIEGEL, PEAK$などが使用)

ルーペの倍率(4) -別解

ルーペの倍率(1)で求めた倍率の公式を近用眼鏡の倍率でもとめた公式に変形してみると

$\frac{qL}{1-L'd}$に$q=k-d,\ L'=L+D$を代入すると

$$\frac{qL}{1-L'd}=\frac{(k-d)L}{1-(L+D)d}$$

$k=\frac{1}{S},\ d=l,\ L=S$を代入すると

$$=\frac{\left(\frac{1}{S}-l\right)S}{1-(S+D)l}$$

$$=\frac{1-lS}{1-(S+D)l}$$

ルーペの倍率(5) –別解

さらに一般的に焦点より短い距離に物体があり、虚像を基準とする距離qに結ぶようにすれば、

$$-q = -k' + d$$

$$\therefore q = k' - d$$

$$L + F = L'$$

$$\therefore L = -F + L'$$

$L' = \dfrac{1}{k'}$より

$$m = \frac{qL}{1 - L'd} = \frac{(k'-d)L}{1 - L'd} = \frac{(k'-d)(-F + L')}{1 - L'd} = \frac{(-k'F + k'L' + dF - dL')}{1 - L'd}$$

$$= \frac{-k'F + k' \bullet \frac{1}{k'} + dF - \frac{d}{k'}}{1 - \frac{d}{k'}} = \frac{-k'F + 1 + dF - \frac{d}{k'}}{1 - \frac{d}{k'}} = \frac{-k'F + dF + 1 - \frac{d}{k'}}{1 - \frac{d}{k'}}$$

$$= \frac{-k'F + dF}{1 - \frac{d}{k'}} + 1 = \frac{(-k'F + dF)k'}{k' - d} + 1 = \frac{-Fk'(k'-d)}{k'-d} + 1 = -Fk' + 1$$

$$= -F(d + q) + 1$$

ここで、目をレンズに近づけ、$d = 0$となるとき、倍率が最大となり、

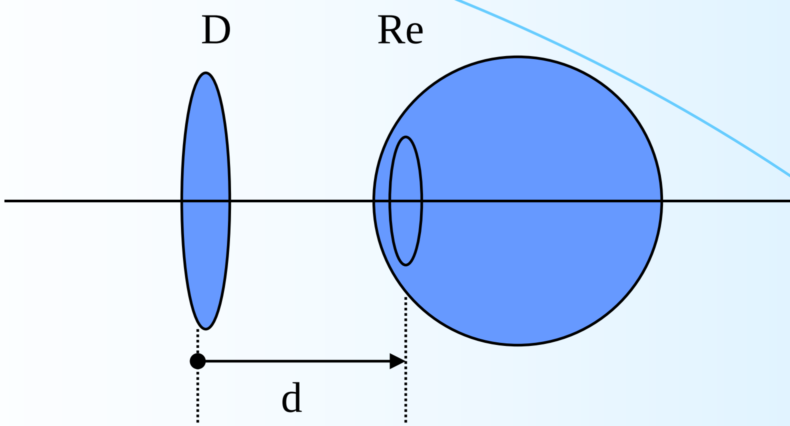
$$m = -qF + 1$$

$q = -0.25m$とすると

$$m = \frac{F}{4} + 1$$

COIL、*ESCHENBACH*、*CARTON*、*WINNER*などがこの表示方法を使用。

ルーペの倍率(6) -屈折異常がある場合の一般式-



D:ルーペの屈折力

Re:屈折異常値（遠点屈折度）

1）レンズと眼をdだけ離すときの倍率

中和の考え方を用いるとこの眼は-Reのレンズを持っているのと同じことなので、ルーペとの合成屈折力を求めればよい。公式より、

$$D+(-Re)-d\cdot D(-Re)=D-Re+d\cdot D\cdot Re=-Re(1-d\cdot D)+D$$

ルーペの基準倍率は基準距離をq(m)とするとqを掛ければよいので、

$$m=q\{-Re(1-d\bullet D)+D\}=-q\{(1-d\bullet D)Re-D\}$$

$$q=0.25\text{とすると}$$

$$m=-\frac{(1-d\bullet D)Re-D}{4}$$

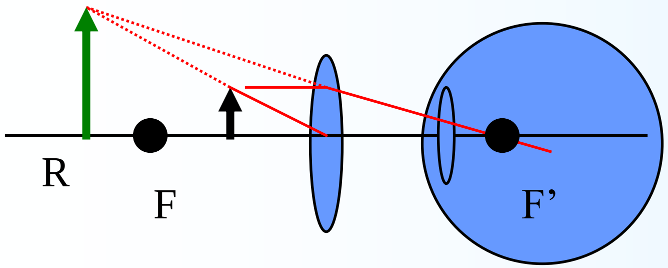
2）レンズと眼を密着させるとd=0より

$$m=-\frac{Re-D}{4}$$

(ロービジョンケアマニュアルより)

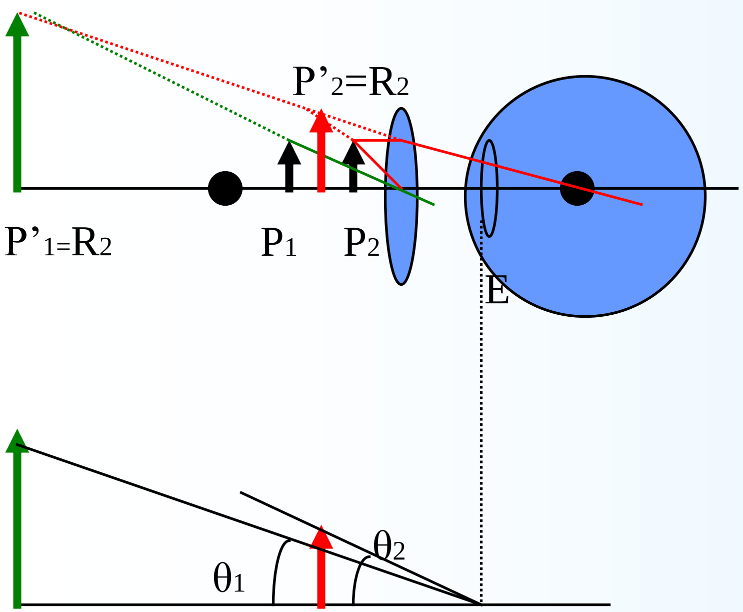
ルーペの倍率(7) –屈折異常がある場合の倍率変化-

a.　屈折異常眼の遠点位置(R)に物体の虚像を作ると無調節で鮮明な拡大像が見られる。



b. 眼をレンズに近づけて見るとき（眼の入射瞳Eが拡大鏡の像側焦点Fよりレンズに近い):

近視度が強い（遠点が眼に近い）ほど拡大率は大きくなる。



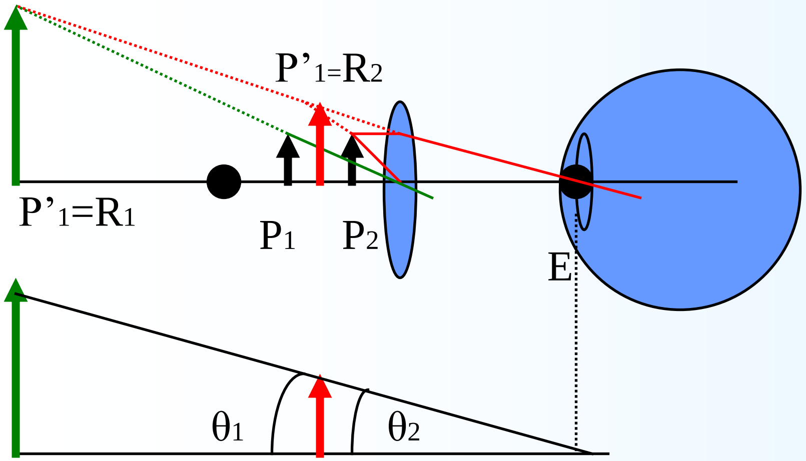
近視度の弱い遠点R_1にできる像P_1の方が近視度の弱い遠点R_2にできる像P_2より小さく見える。

$\theta_2 > \theta_1$

(ロービジョンケアマニュアルより)

ルーペの倍率(8) –屈折異常がある場合の倍率変化-

c. 屈折異常眼の入射瞳Eにルーペの像側焦点F’を一致させる。。

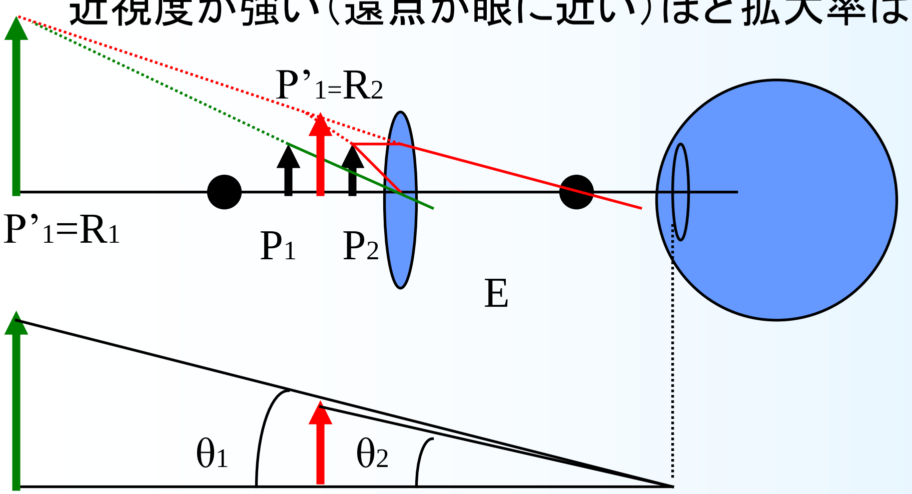


F’を通る光線が主光線となり、物体位置(P_1やP_2)の変化に応じてできる像位置も変化するが、視角$\theta_1\theta_2$は一定となり、倍率は同一になる。

$\theta_2=\theta_1$

d. 眼をレンズから遠ざけて見るとき(眼の入射瞳Eが拡大鏡の像側焦点Fよりレンズより遠い):

近視度が強い(遠点が眼に近い)ほど拡大率は小さくなる。



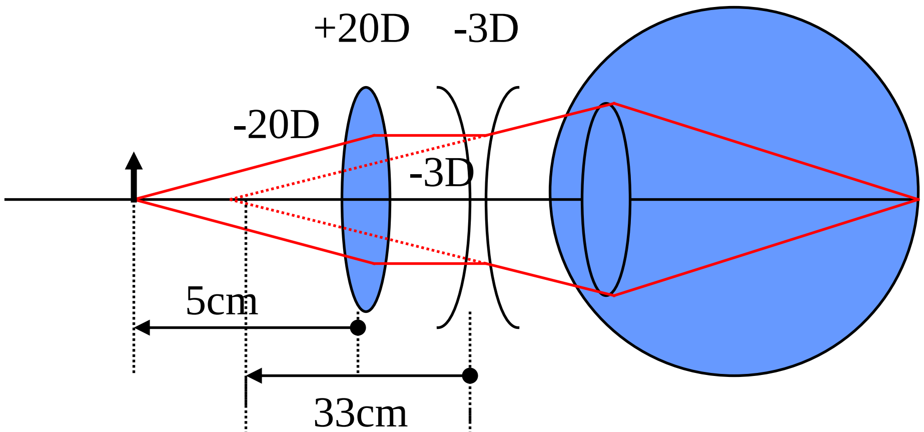
近視度の弱い遠点R1にできる像の方が近視度の弱い遠点R2にできる像より小さく見える。

$\theta_2<\theta_1$

(ロービジョンケアマニュアルより)

ルーペの倍率(9)-近視の場合

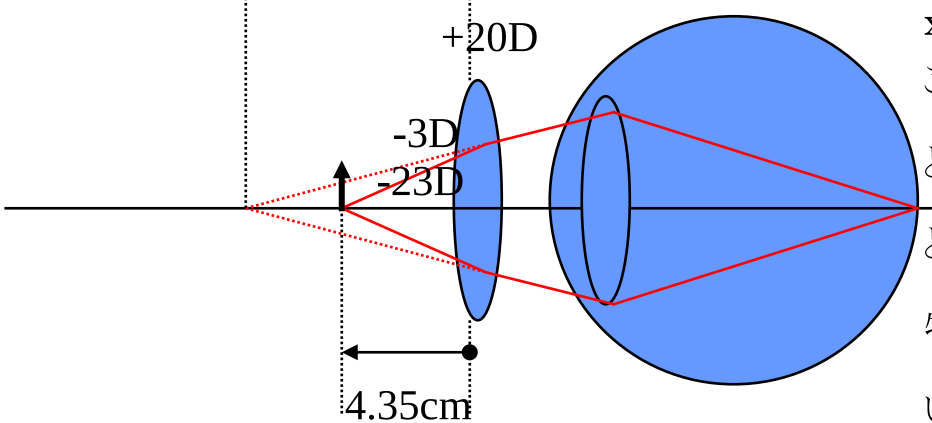
－3Dの眼鏡をかけて＋20Dのルーペを使用している人が眼鏡なしでルーペを使用すると、ルーペの倍率はどうなるか。



$-20+20=0$

$0+(-3)=-3$

ルーペの倍率は $\dfrac{20}{5}=4\mathrm{X}$



$x+20=-3$

$x=-23$

これは＋20Dのルーペが＋23Dの屈折力を持つルーペとして働いていることを意味し、倍率は $\dfrac{23}{4}=5.75\mathrm{X}$ となる。

物体までの距離は $\dfrac{100}{23}\fallingdotseq 4.35\mathrm{cm}$ となり、眼鏡を掛けていた時よりも物体をルーペに近づけなければならない。

ルーペの倍率(10) –近視でレンズから眼を遠ざける

-3Dの近視で近見視力0.1(30cm)の場合、新聞の本活字を読めるようにしたい。近方視力として0.5程度は必要であり、眼をレンズに密着させて見るとする。ルーペの度数はいくらにすればよいか。

　またこのルーペを眼から15cm離して見るときの倍率はどうなるか。

<解答>

眼をレンズに密着させて見る場合

基準距離は30cm、必要拡大倍率は0.5/0.1=5倍だから

-0.3(Re-D)=-0.3(-3-D)=5よりD=13.67D、よって15D(焦点距離6.7cm)を処方。

像が眼前(レンズ前方）33cmにできるように物体はレンズ前方5.6cmに置く。(∵x+15=-3 x=-18D 100/18≒5.6cm)

眼をルーペから15cm離して見る場合

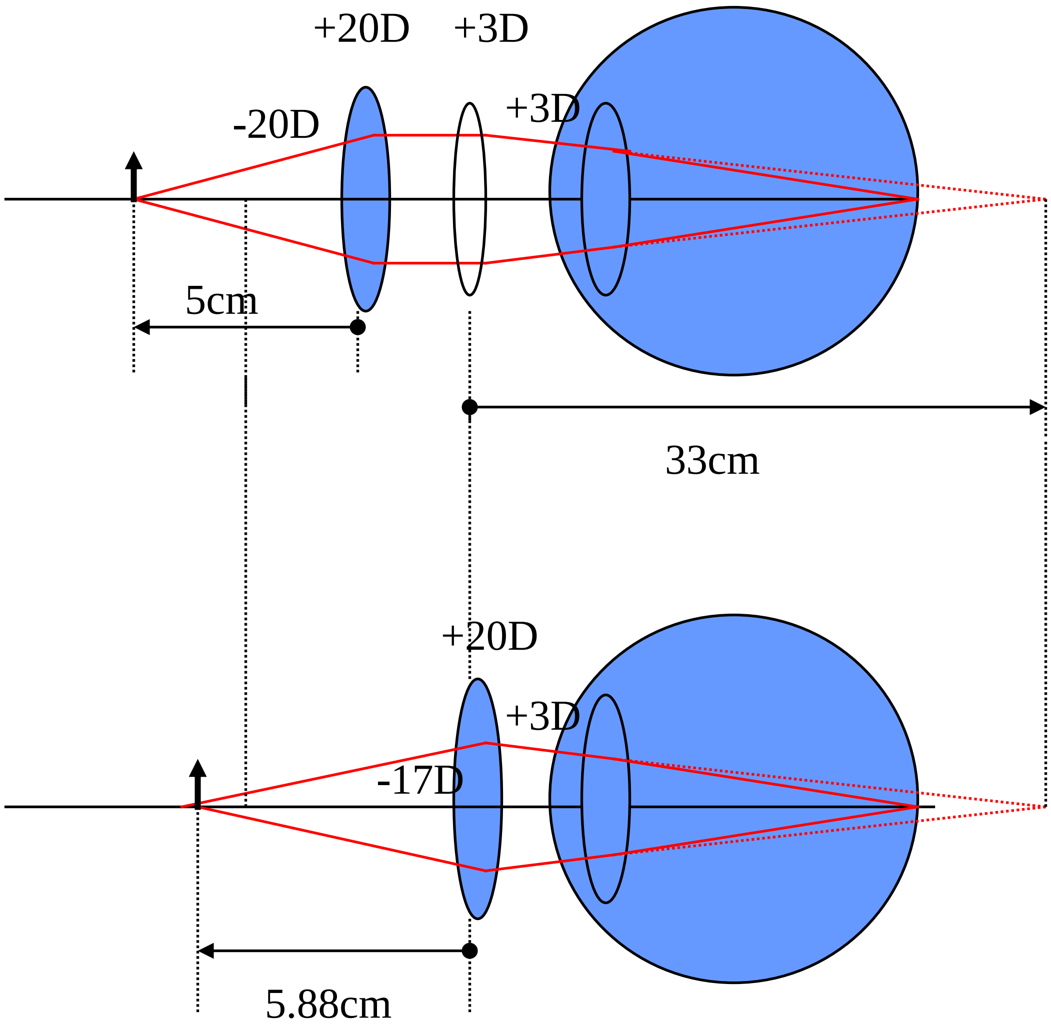
$-q\{(1-d\bullet D)\mathrm{Re}-D\}=-0.3\{(1-0.15\times 15)(-3)-15\}=3.68$倍と倍率が下がり新聞を読むことが困難になる。

像はレンズ前方$18.3cm(33.3-15=18.3)$にできるように物体はレンズ前方$4.9cm$に置く。

(ロービジョンケアマニュアルより)

ルーペの倍率(11)-遠視の場合

+3Dの眼鏡をかけて＋20Dのルーペを使用している人が眼鏡なしでルーペを使用すると、ルーペの倍率はどうなるか。



$-20+20=0$

$0+(+3)=+3$

ルーペの倍率は $\frac{20}{5}=4\mathrm{X}$

$x+20=+3$

$x=-17$

これは＋20Dのルーペが＋17Dの屈折力を持つルーペとして働いていることを意味し、倍率は $\frac{17}{4}=4.25\mathrm{X}$ となる。

物体までの距離は $\frac{100}{17}\fallingdotseq 5.88\mathrm{cm}$ となり、眼鏡を掛けていた時よりも物体をルーペから遠ざけなければならない。

ルーペの倍率(12) –遠視でレンズから眼を遠ざける

+3Dの遠視で近見視力0.1(30cm)の場合、新聞の本文活字を読めるようにしたい。近見視力として0.5程度は必要であり、眼をレンズに密着させて見るとする。どの程度の屈折度のルーペを処方すればよいか。

また眼をルーペから15cm離して見るときはどうなるか。

<解答>

眼をルーペに密着させて見る場合

-0.3･(+3-D)=5よりD=19.67D, よって20D(焦点距離5cm）処方。

像が眼の後ろ（レンズ後方）33cmにできるように物体はレンズ前方5.9cmに置く。(∵x+20=3よりx=-17。100/-17=-5.9）

眼をルーペから15cm離して見る場合

屈折異常がある場合のルーペの倍率を求める一般式

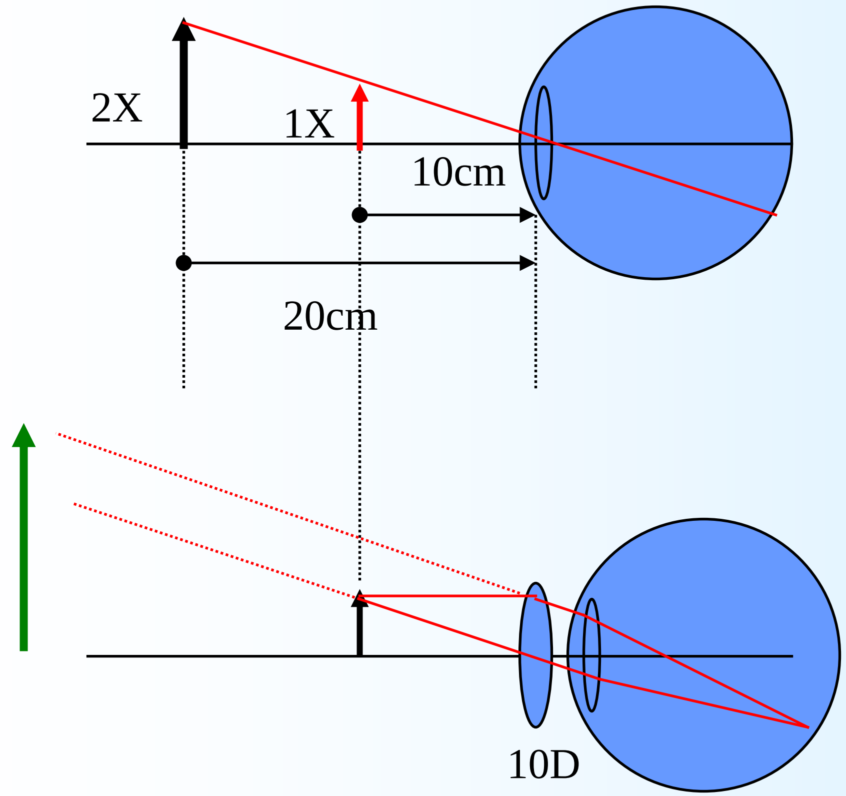
$-q\{(1-d\bullet D)\mathrm{Re}-D\}$に代入すると

$(-0.3)\times\{1-0.15\times 20\times(+3)-20\}=7.8$倍と倍率が上がる。

(ロービジョンケアマニュアルより）

ルーペの倍率(13) -算定方法、正視眼の場合

新聞記事の文字の2倍の文字を20cmで読めた場合に、新聞記事を読むために必要なルーペの倍率。

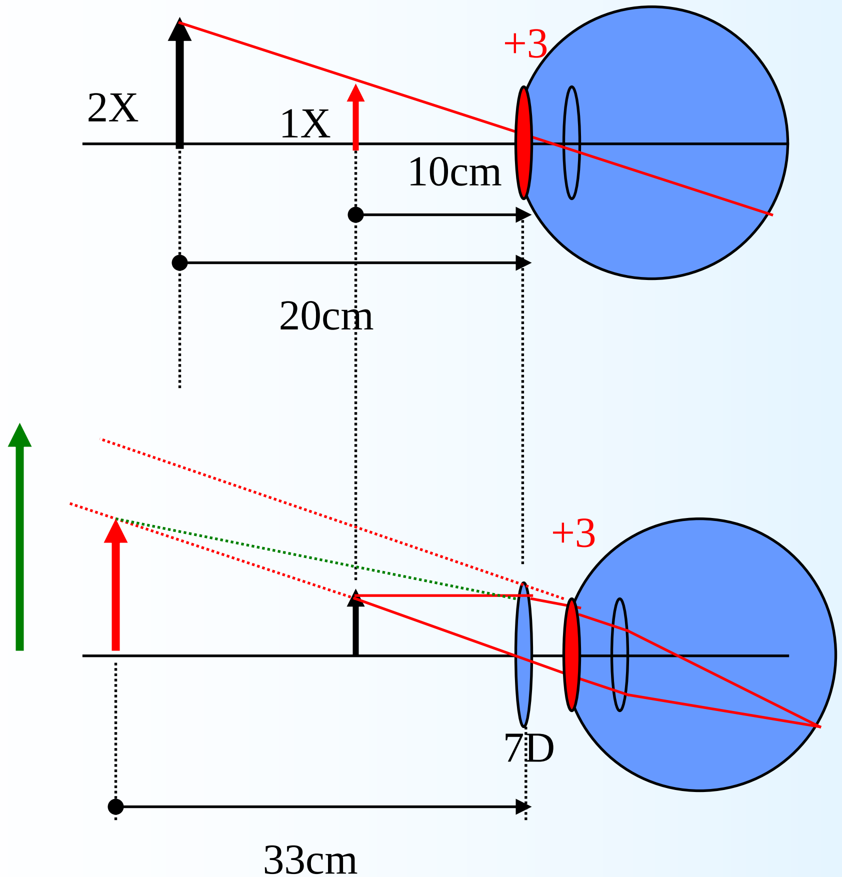


2Xの文字を20cmで読める(5D;1/0.2の調節力を使用)ので、10cm (20cm/2X)に1Xの文字を持ってくれば網膜上には同じ大きさで結像し、見える。しかし調節力がないのでルーペで10D(1/0.1)だけ補完する必要がある(眼が無調節で眼とレンズの距離が0と仮定する)。

10Dのルーペは10cmにある1Xの文字の虚像を無限遠上に結像し、眼は20cmにあった2Xの文字と同じ大きさの像を無調節の状態で見ることができる。

ルーペの倍率(14) -算定方法、近視眼の場合

-3Dの近視眼の人が裸眼で新聞記事の文字の2倍の文字を20cmで読めた場合に、新聞記事を読むために必要なルーペの倍率。

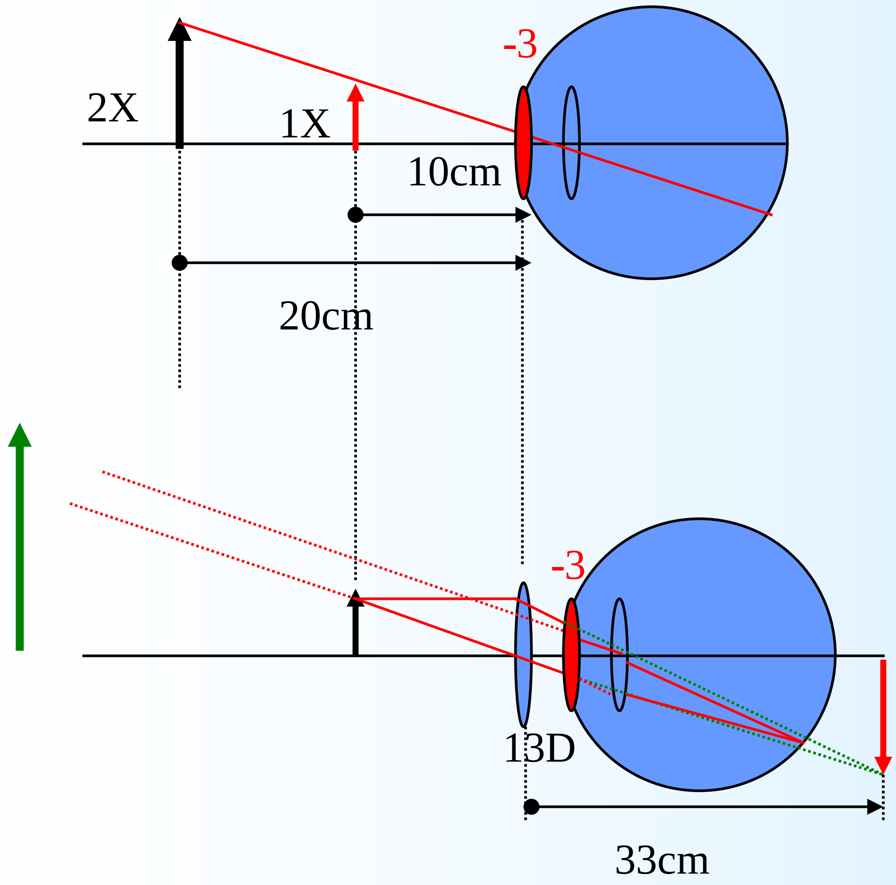


-3Dの近視眼は眼の中に+3Dのレンズが組み込まれていると仮定する。2Xの文字を読むときの調節力は5-3=2Dだけでよい。

組み込まれた+3Dと合わせて+10Dとなるようなルーペを考えればよいので、必要なルーペは10-3=7Dとなる。

ルーペの倍率(15) -算定方法、遠視眼の場合

-3Dの近視眼の人が裸眼で新聞記事の文字の2倍の文字を20cmで読めた場合に、新聞記事を読むために必要なルーペの倍率。

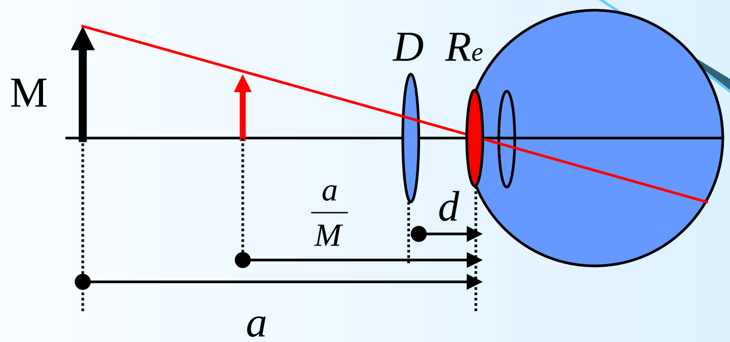


+3Dの遠視眼は眼の中に-3Dのレンズが組み込まれていると仮定する。2Xの文字を読むときの調節力は5-(-3)=8D必要になる。

組み込まれた-3Dと合わせて+10Dとなるようなルーペを考えればよいので、必要なルーペは10-(-3)=13Dとなる。

ルーペの倍率(16) -算定方法、頂間距離を考慮した公式

眼の屈折異常値をR_e、頂間距離をdとし、近見視力チャートのMサイズがM、視距離がaであるときのルーペの屈折力Dを求める。



眼に組み込まれた仮想のレンズとルーペの合成屈折力が、正視眼で1Xの文字を見るために必要な屈折力となればよい。

$D_1 + D_2 - dD_1D_2 = \dfrac{M}{a}$に、$D_1 = D$、$D_2 = -R_e$を代入し、

$$D - R_e - dD(-R_e) = \frac{M}{a}$$

$$\therefore D = \frac{M + R_e a}{a(1 + dR_e)}$$

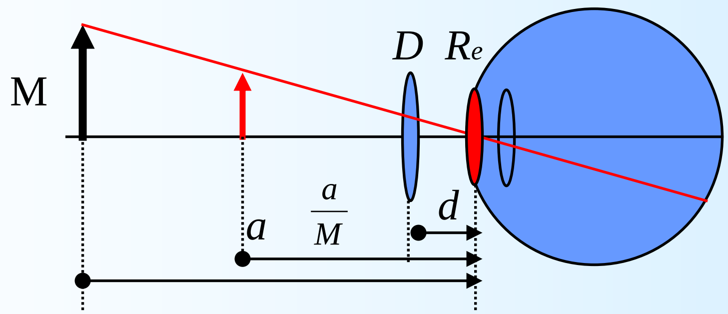
更に、乱視を考慮し、

目の屈折異常値の球面度数をS、円柱度数をC、常用眼鏡の球面度数をS'、円柱度数をC'として、R_eに等価球面度数を代入してやると、

$$R_e = (S - S') + \frac{C - C'}{2}$$

ルーペの倍率(17) –倍率の算定例題

眼の屈折異常値がsph-4.75 cyl-2.5 Ax180、常用眼鏡の度数がsph-3 cyl-1.0 Ax180で、頂間距離を5cmとし、近見視力チャートのMサイズが2倍、視距離が20cmであるときのルーペの屈折力Dを求める。



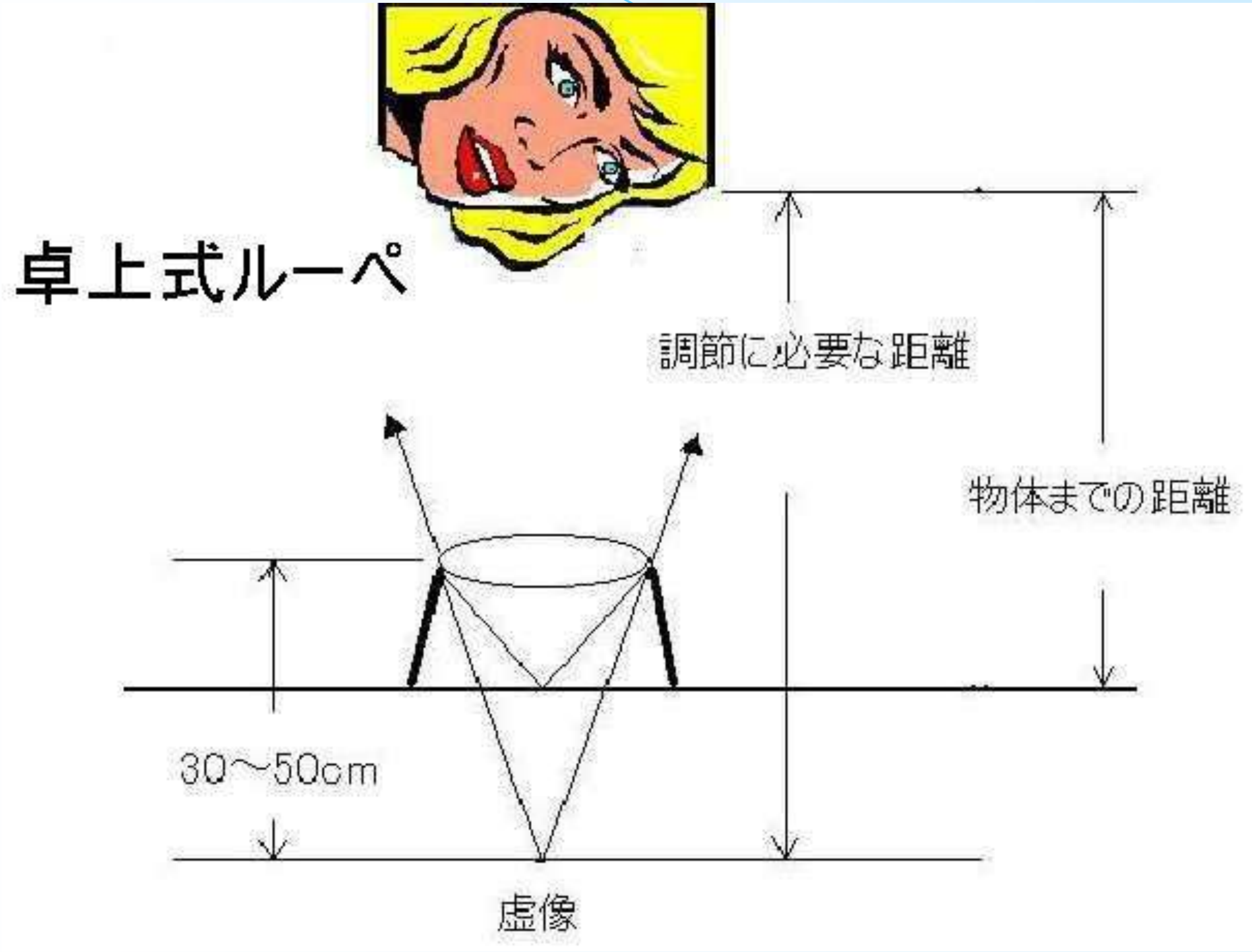
$R_e = (S - S') + \dfrac{C - C'}{2}$ を利用し、等価球面度数を求めると、

$$R_e = -4.75 - (-3) + \frac{-2.5 - (-1.0)}{2} = -1.75 + \frac{-1.5}{2} = -1.75 - 0.75 = -2.5$$

$D = \dfrac{M + R_e a}{a(1 + dR_e)}$ にそれぞれの値を代入すると

$$D = \frac{2 - 2.5 \times 0.2}{0.2\{1 + 0.05 \times (-2.5)\}} = \frac{2 - 0.5}{0.2 \times 0.875} = \frac{1.5}{0.175} \fallingdotseq 8.57$$

卓上式ルーペの虚像位置(1)



卓上式ルーペの虚像位置(2)

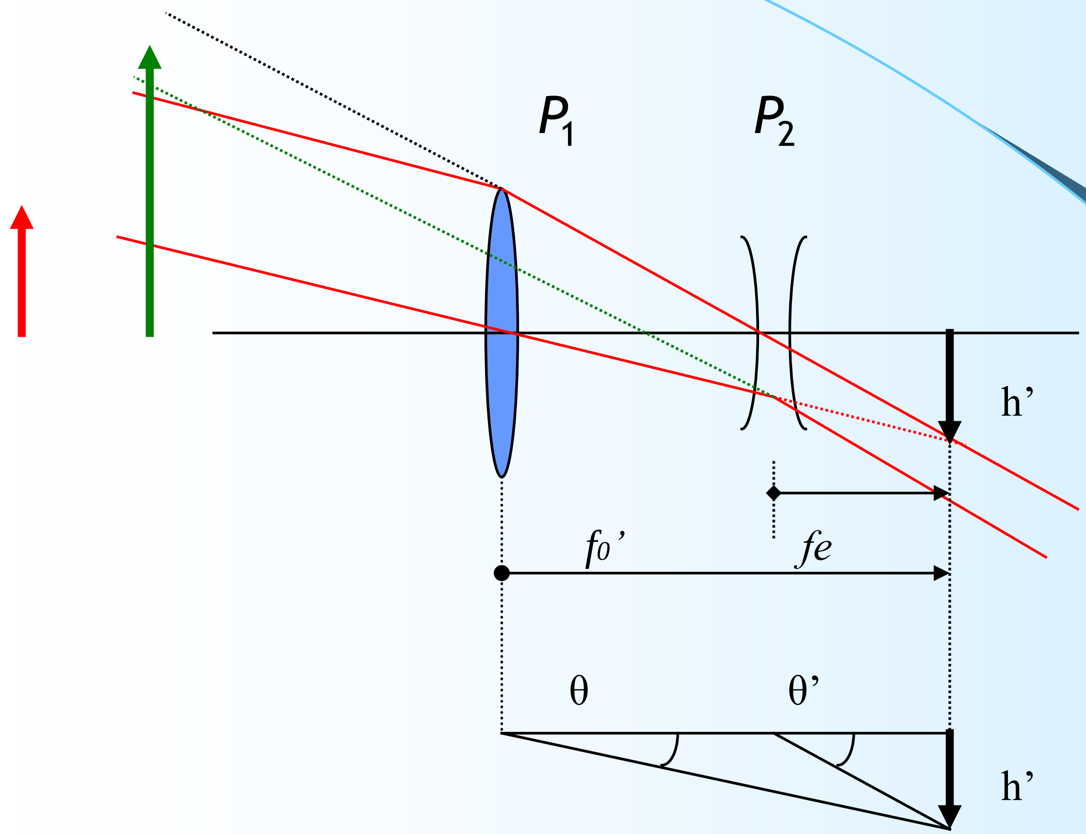
卓上式ルーペの虚像位置(3)

卓上式ルーペの上に単眼鏡を載せ、像がはっきりするように筒の長さを調節する。

卓上式ルーペの虚像位置(4)

卓上式ルーペの虚像位置(5)

単眼鏡の種類 –ガリレイ型



P_1の第２焦点距離をf_o'(+)、P_2の第１焦点距離をf_e(+)とすると

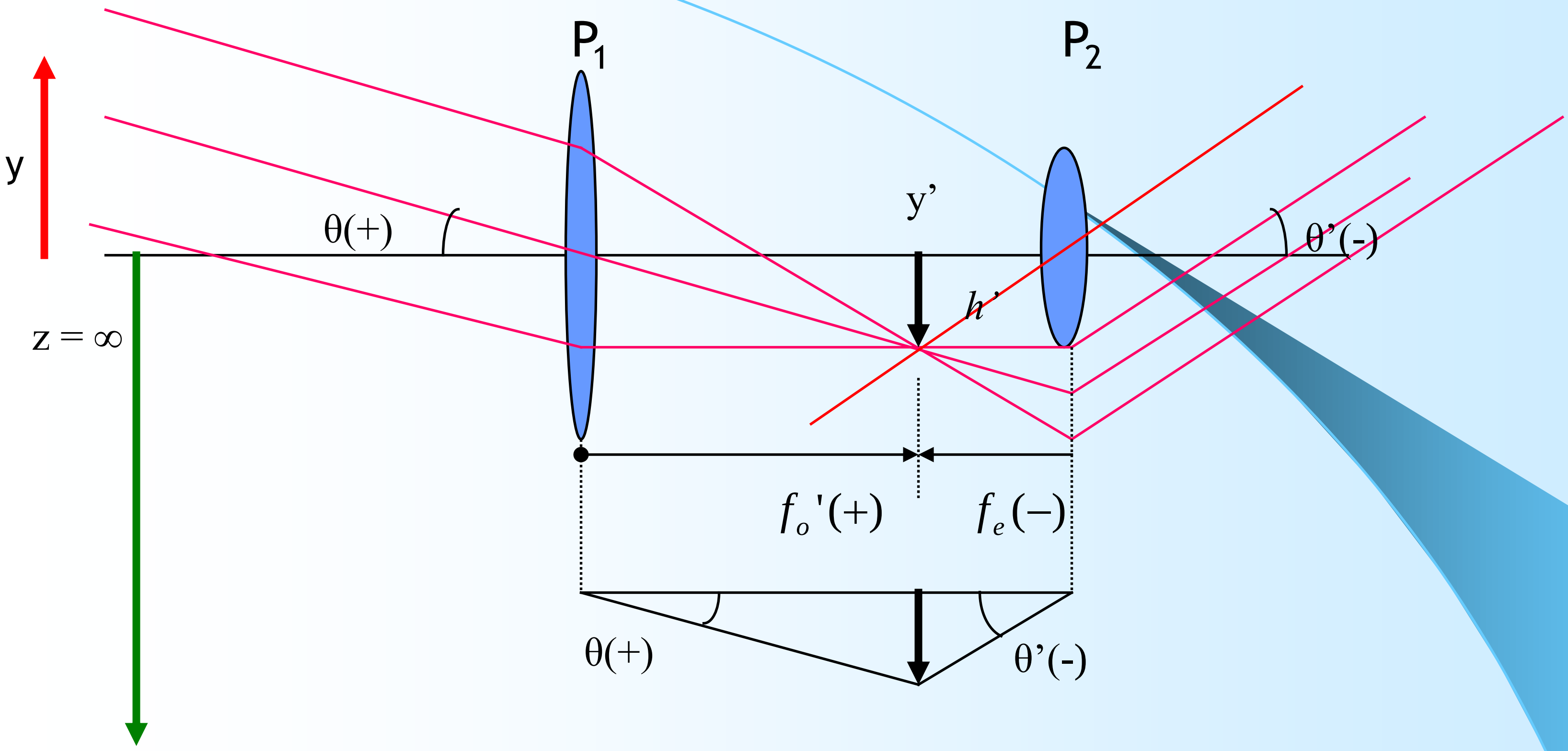
$$m = \frac{\tan\theta'}{\tan\vartheta} = \frac{\frac{h'}{f_e}}{\frac{h'}{f_o'}} = \frac{f_0'}{f_e} = \frac{f_0'}{-f_e'}$$

$P_1 = \frac{1}{f_0'}, P_2 = \frac{1}{f_e'}$とすると

$$m = -\frac{P_2}{P_1}$$

(ロービジョンケアマニュアルより)

単眼鏡の種類 –ケプラー型



P_1の第２焦点距離を$f_o'(+)$、P_2の第１焦点距離を$f_e(-)$とすると

$$m = \frac{\tan\theta'}{\tan\vartheta} = \frac{\dfrac{h'}{f_e}}{\dfrac{h'}{f_o'}} = \frac{f_0'}{f_e} = \frac{f_0'}{-f_e'}$$

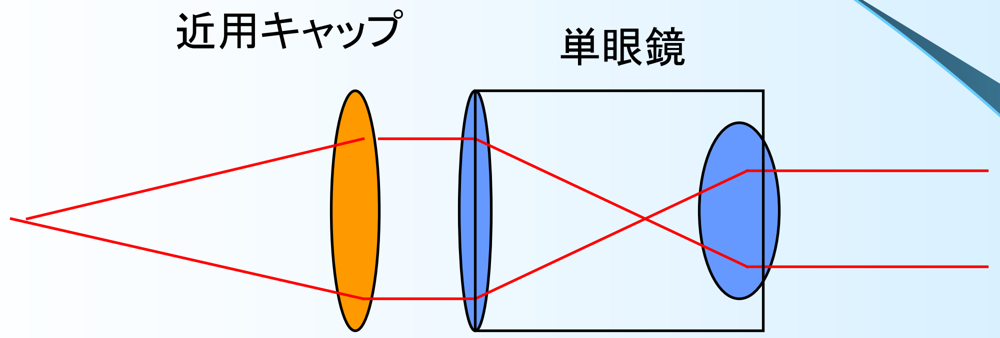
$P_1 = \dfrac{1}{f_0'},\ P_2 = \dfrac{1}{f_e'}$とすると

$$m = -\frac{P_2}{P_1}$$

(ロービジョンケアマニュアルより)

単眼鏡を通して近くを見る

単眼鏡を近用にして使用するときには、遠用の主鏡の上から作業距離に応じた近用キャップを取り付ける。



近用補助レンズ(D)を用いた場合の倍率(基準距離25cm)

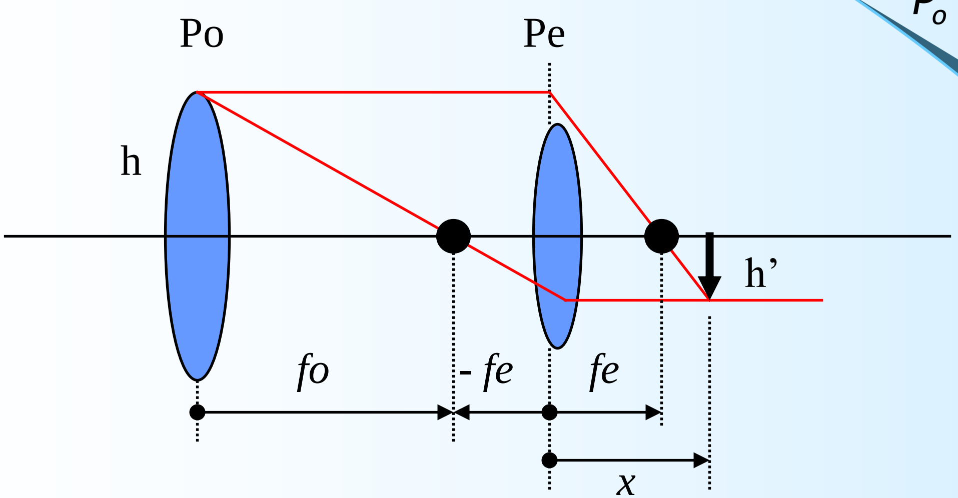
単眼鏡の基準倍率 X D/4

Eye ring

Eye ring: 接眼レンズによる対物レンズの像

単眼鏡の倍率＝対物レンズの半径/eye ringの半径

$$-\frac{P_e}{P_o} = -\frac{h_o}{h_e}$$



$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{fo+fe} + \frac{1}{fe} = \frac{-fe+fo+fe}{fe(fo+fe)} = \frac{fo}{fe(fo+fe)}$$

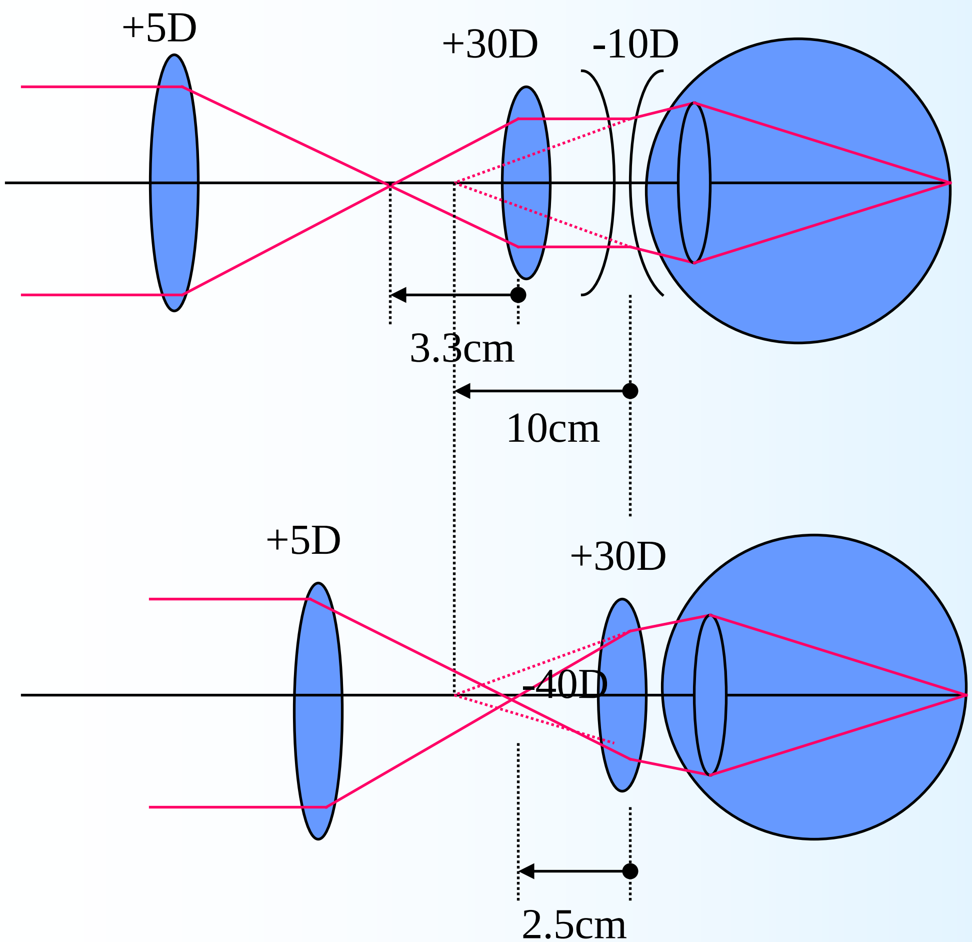
$$x = \frac{fe(fo+fe)}{fo}$$

$$-\frac{h}{h'} = -\frac{fe}{x-fe} = -\frac{fe}{\frac{fe(fo+fe)}{fo} - fe} = -\frac{fe}{\frac{fe(fo+fe)-fofe}{fo}} = -\frac{fe}{\frac{fefo+fe^2-fofe}{fo}}$$

$$= -\frac{fefo}{fe^2} = -\frac{fo}{fe} = -\frac{Pe}{Po}$$

単眼鏡の倍率-近視の場合

対物レンズ+5D、接眼レンズ+30Dの単眼鏡を－10Dの眼鏡をかけて見ている人が、
眼鏡をとるとどうなるか？



$x+30=-10$

$x=-40$

つまり、接眼レンズは$+40$Dの働きをしているので、単眼鏡の倍率は$\frac{40}{5}=8$Xとなる。

接眼レンズは対物レンズの焦点までの距離が$\frac{1}{40}=2.5$cmとなり、30Dのときの距離$\frac{1}{30}\fallingdotseq 3.3$cmのときより$3.3-2.5=0.8$cm短くなる。