
ルーペの倍率変化

日本ライトハウス養成部

田辺正明★

はじめに

ルーペは物体を大きく見るときに使う簡単で便利な道具であり、ルーペを物体に近づけたり遠ざけたりして像の大きさを変え、自分の好みの大きさにして使っている。しかし、その大きさがどのように変化しているのかはあまり知られることはない。そこで、本稿では物体とレンズ間の距離変化、レンズと眼間の距離変化による像の大きさの増減を計算と図解で説明することを試みた。なお、像の倍率はSloan-Habel及びKühlの公式を用いて計算した。

I. ルーペの倍率を求める公式

1. Sloan-HabelとKühlの公式

D = (ルーペの屈折力)

e = $H'_L H_A$ (ルーペ-眼間の主点間距離)

a = $H_L O$ (ルーペの作業距離)

A = $1/a$

a' = $H'_L O'$ (ルーペの虚像距離)

A' = $1/a'$

a_E = $H_A O'$ (虚像-眼間の主点間距離 (調節距離))

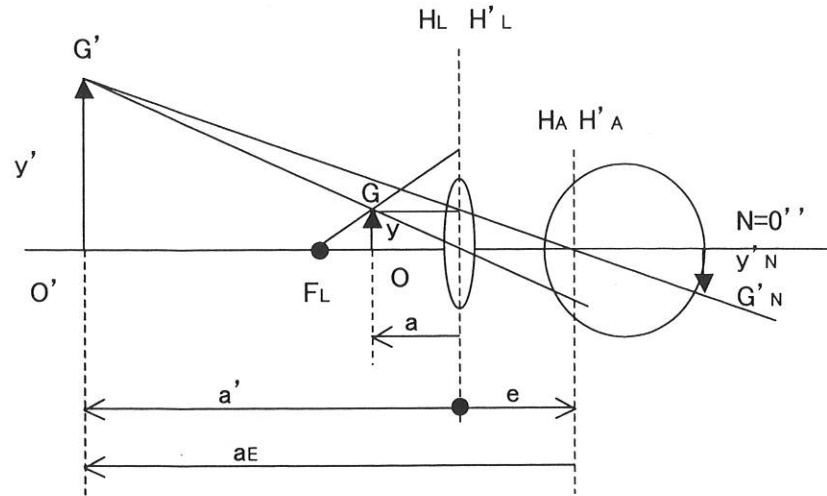
A_E = $1/a_E$ (調節力)

a_0 = (基本距離)

A_0 = $1/a_0$ (基本屈折力)

★たなべただあき 日本ライトハウス養成部

(a_E と a' の関係) $a_E = H_A O' = H_A H'_L + H'_L O' = -e + a'$



a) Kühl (キュール) の公式

「Dの前方の適切な位置とeによって調節距離 a_E が与えられたら、調節力 $A_E=1/a_E$ から倍率mを求めるためのキュールの公式が得られる。」

$$m = \frac{D}{-A_o} + \frac{A_E}{A_o} (1 - De)$$

D = (ルーペの屈折力: dpt)

A_E = (調節力: dpt)

A_o = (基本屈折力: dpt、基準は-4dpt)

e = (ルーペ-眼間の主点間距離: m)

b) Sloan-Habel (スローンとハベル) の公式

「ルーペの利用では虚像に対する調節距離 a_E は一般的には知ることが困難であるが、ルーペと物体間距離のaは分かりやすいので、 a_E の変わりにaを使用し倍率を求めるためにスローンとハベルの公式が得られる。」

$$m = \frac{a_o}{a - e - aeD}$$

[Allgemeinen Optikより引用]

2. Sloan-Habelの公式の求め方

調節力 (x)

① レンズの公式から

$$\begin{aligned} \frac{D+x-eDx}{1-ex} &= -\frac{1}{a} \\ a(D+x-eDx) &= -1+ex \\ aD+ax-aeDx &= -1+ex \\ x(a-aeD-e) &= -aD-1 \\ x &= \frac{-aD-1}{a-aeD-e} = \frac{1+aD}{-a+e(1+aD)} \end{aligned}$$

② 図中のvergenceより

$$\begin{aligned} x &= -A_E = -\frac{1}{a_E} \\ &= -\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{a}+D} - e} = -\frac{1}{\frac{1}{\frac{1+aD}{a} - e}} = -\frac{1}{\frac{1}{\frac{1+aD}{a} - e}} = -\frac{1}{\frac{1}{1+aD} - e} \\ &= -\frac{1+aD}{a-e(1+aD)} = \frac{1+aD}{-a+e(1+aD)} \end{aligned}$$

合成屈折力 (F)

$$\begin{aligned} F &= D+x-eDx \\ &= D + \frac{1+Da}{-a+e(1+aD)}(1-De) = D + \frac{(1+Da)(1-De)}{-a+e(1+aD)} = D + \frac{1-De+Da-D^2ae}{-a+eDa+e} \\ &= \frac{D(-a+eDa+e)+1-De+Da-D^2ae}{-a+eDa+e} = \frac{-Da+eD^2a+De+1-De+Da-D^2ae}{-a+eDa+e} \\ &= \frac{1}{-a+eDa-e} \end{aligned}$$

倍率 (m)

$$m = -a_o F = \frac{-a_o}{-a+e+eDa} = \frac{a_o}{a-e-aeD}$$

3. Sloan-Habelの公式からKühlの公式を導く

aを求めると

$$A_E = \frac{1}{a_E} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{a} + D} - e} \Rightarrow \frac{1}{A_E} = \frac{1}{\frac{1}{a} + D} - e \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{a} + D} = \frac{1}{A_E} + e \Rightarrow \frac{1}{a} + D = \frac{1}{\frac{1}{A_E} + e}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{A_E} + e} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1}{A_E} + e} - D$$

$$a = \frac{1}{\frac{1}{A_E} - e} = \frac{1}{\frac{1}{1 + A_E e} - D} = \frac{1}{\frac{A_E}{1 + A_E e} - D} = \frac{1 + A_E e}{A_E - D(1 + A_E e)}$$

a-e-aeDに代入

$$a - e - aeD = a(1 - eD) - e = \frac{(1 + A_E e)(1 - eD)}{A_E - D(1 + A_E e)} - e$$

$$= \frac{(1 + A_E e)(1 - eD) - e\{A_E - D(1 + A_E e)\}}{A_E - D(1 + A_E e)}$$

$$= \frac{1 - eD + A_E e - A_E e^2 D - A_E e + De(1 + A_E e)}{A_E - D(1 + A_E e)} = \frac{1 - eD - A_E e^2 D + De + A_E e^2 D}{A_E - D - A_E eD}$$

$$= \frac{1}{A_E(1 - eD) - D}$$

Sloan-Habelの公式を変形すると

$$\frac{a_0}{a - e - aeD} = \frac{1}{A_0} \cdot \frac{A_E(1 - eD) - D}{1} = \frac{A_E(1 - eD) - D}{A_0} = -\frac{D}{A_0} + \frac{A_E}{A_0}(1 - eD)$$

・・・Kühlの公式

4. 無限遠上の虚像を見る場合、基準距離を25cmとしたときの倍率

$$A_0 = -4$$

$$A_E = 0$$

$$\therefore \frac{D}{4} + \frac{0}{4}(1 - eD) = \frac{D}{4}$$

5. 25cm上の虚像をルーベ-眼間距離0、基準距離25cmで見るときの倍率

$$A_0 = -4$$

$$A_E = -4$$

$$e = 0$$

$$\therefore \frac{D}{4} + \frac{-4}{-4}(1 - 0 \cdot D) = \frac{D}{4} + 1$$

II. ルーベ-眼間の距離、物体-ルーベ間距離の変化が屈折力D (dpt) である凸レンズの倍率に及ぼす変化

Sloan-Habelの公式を絶対値で表すと

$$m = \frac{|a_0|}{|a + e - |a|eD|} = \frac{|a_0|}{|a(1 - eD) + e|} = \frac{|a_0|}{e(1 - |a|D) + |a|}$$

凸レンズなのでD > 0

1. 眼を静止して物体をレンズに近づける場合の倍率変化

① $e < \frac{1}{D}$ の時 (焦点距離よりも短い距離に眼の主点がある場合)

$$eD < 1 \Rightarrow 1 - eD > 0 \text{ より}$$

$$|a| \downarrow \Rightarrow |a(1 - eD) + e| \downarrow \Rightarrow \frac{|a_0|}{|a(1 - eD) + e|} \uparrow$$

i) $|a| > \frac{1}{D}$ の時、 $m \uparrow$ ii) $|a| = \frac{1}{D}$ の時、 $m = |a_0|D$ iii) $|a| < \frac{1}{D}$ の時、 $m \uparrow$

★焦点距離よりも短い距離に眼があれば、物体を近づけるに従い

倍率は増加する。また、焦点上に物体があると $|a_0|D$ となる。

② $e = \frac{1}{D}$ の時 (焦点上に眼の主点がある場合)

$$\frac{|a_0|}{|a|(1-eD)+e} = \frac{|a_0|}{e} = |a_0|D$$

i) $|a| > \frac{1}{D}$ の時、 $m = |a_0|D$

ii) $|a| = \frac{1}{D}$ の時、 $m = |a_0|D$

iii) $|a| < \frac{1}{D}$ の時、 $m = |a_0|D$

★焦点上に眼があれば、物体の位置に関係なく倍率はルーペの基準倍率となる。

③ $e > \frac{1}{D}$ の時 (焦点距離よりも長い距離に眼の主点がある場合)

$$eD > 1 \Rightarrow 1 - eD < 0$$

実像位置を求めると $0 < \frac{1}{\frac{1}{a} + D} = \frac{1}{1 + aD} = \frac{a}{1 + aD}$

i) $\frac{1}{D} < \frac{a}{1+aD} < e$ の時

$$a < 0 \text{ より } 1 + aD < 0 \left(\because \frac{a}{1+aD} > 0 \right)$$

$$\frac{a}{1+aD} < e \Rightarrow a > e(1+aD) = e + aeD \Rightarrow a - e - aeD > 0 \Rightarrow$$

$$-a + e + aed < 0 \Rightarrow |a| + e - |a|eD < 0 \Rightarrow |a|(1 - eD) + e < 0$$

$$1 - eD < 0 \text{ より}$$

$$|a| \downarrow \Rightarrow |a|(1 - eD) + e \uparrow (\text{負}) \Rightarrow \frac{|a_0|}{|a|(1 - eD) + e} \downarrow (\text{負}) \Rightarrow \left| \frac{|a_0|}{|a|(1 - eD) + e} \right| \uparrow$$

$$\therefore m \uparrow$$

★実像の位置よりもよりも長い距離に眼の主点があれば、物体を近づけるに従い、倍率は倒立像で増加する。

ii) $\frac{1}{D} < e < \frac{a}{1+aD}$ の時

$$a < 0 \text{ より } 1 + aD < 0 \left(\because \frac{a}{1+aD} > 0 \right)$$

$$e < \frac{a}{1+aD} \Rightarrow a < e(1+aD) = e + aeD \Rightarrow a - e - aeD < 0 \Rightarrow -a + e + aeD > 0 \Rightarrow$$

$$|a| + e - |a|eD > 0 \Rightarrow |a|(1 - eD) + e > 0$$

$$1 - eD < 0 \text{ より}$$

$$|a| \downarrow \Rightarrow |a|(1 - eD) + e \uparrow (\text{正}) \Rightarrow \frac{|a_0|}{|a|(1 - eD) + e} \downarrow (\text{正})$$

$$\therefore m \downarrow$$

★焦点距離よりも長く、実像の位置よりも短い距離に眼の主点があれば、物体を近づけるに従い、倍率は正立像で減少する。

iii) $|a| = \frac{1}{D}$ の時

$$|a|D = 1$$

$$\frac{|a_0|}{e(1 - |a|D) + |a|} = \frac{|a_0|}{|a|} = |a_0|D$$

$$\therefore m = |a_0|D$$

★物体が焦点上に来ると倍率は $|a_0|D$ となる。

iv) $|a| < \frac{1}{D}$ の時

$$1 - eD < 0 \text{ より}$$

$$|a| \downarrow \Rightarrow |a|(1 - eD) + e \uparrow \Rightarrow \frac{|a_0|}{|a|(1 - eD) + e} \downarrow$$

$$\therefore m \downarrow$$

★焦点距離よりも長い距離に眼の主点があれば、物体を近づけるに従い倍率は減少する。

2. 物体を静止して眼をレンズから遠ざける場合の倍率変化

① $|a| > \frac{1}{D}$ (焦点距離より遠い場所に物体を置く)

$$|a|D > 1 \Rightarrow 1 - |a|D < 0$$

i) $e < \frac{1}{D}$ の時

$$1 - |a|D < 0 \text{ より}$$

$$e \uparrow \Rightarrow |a| + e(1 - |a|D) \downarrow \Rightarrow \frac{|a_0|}{|a| + e(1 - |a|D)} \uparrow$$

$$\therefore m \uparrow$$

★眼をレンズから遠ざけると倍率は増加する。

ii) $e = \frac{1}{D}$ の時

$$eD = 1 \Rightarrow \frac{|a_0|}{|a|(1 - eD) + e} = \frac{|a_0|}{e} = |a_0|D$$

$$\therefore m = |a_0|D$$

★眼が焦点上に来ると倍率は基準倍率 $|a_0|D$ となる。

iii) $\frac{1}{D} < e < \frac{a}{1 + aD}$ の時

$$a < 0 \text{ より } 1 + aD < 0 \left(\because \frac{a}{1 + aD} > 0 \right)$$

$$e < \frac{a}{1 + aD} \Rightarrow a < e(1 + aD) = e + aeD \Rightarrow a - e - aeD < 0 \Rightarrow$$

$$-a + e + aeD > 0 \Rightarrow |a| + e - |a|eD > 0 \Rightarrow e(1 - |a|D) + |a| > 0$$

$$1 - |a|D < 0 \text{ より}$$

$$e \uparrow \Rightarrow e(1 - |a|D) + |a| \downarrow (\text{正}) \Rightarrow \frac{|a_0|}{e(1 - |a|D) + |a|} \uparrow (\text{正})$$

★眼の主点が焦点よりも遠く実像よりも近い位置にある場合は眼をレンズから遠ざけると正立像で倍率は増加する。

iv) $\frac{1}{D} < \frac{a}{1 + aD} < e$ の時

$$a < 0 \text{ より } 1 + aD < 0 \left(\because \frac{a}{1 + aD} > 0 \right)$$

$$\frac{a}{1 + aD} < e \Rightarrow a > e(1 + aD) = e + aeD \Rightarrow a - e - aeD > 0 \Rightarrow -a + e + aeD < 0 \Rightarrow$$

$$|a| + e - |a|eD < 0 \Rightarrow e(1 - |a|D) + |a| < 0$$

$$1 - |a|D < 0 \text{ より}$$

$$e \uparrow \Rightarrow e(1 - |a|D) + |a| \downarrow (\text{負}) \Rightarrow \frac{|a_0|}{e(1 - |a|D) + |a|} \uparrow (\text{負}) \Rightarrow \left| \frac{|a_0|}{e(1 - |a|D) + |a|} \right| \downarrow$$

★眼の主点が実像よりも遠い位置にある場合は眼をレンズから遠ざけると倒立像で倍率は減少する。

② $|a| = \frac{1}{D}$ (焦点距離上に物体を置く)

$$|a|D = 1 \Rightarrow \frac{|a_0|}{|a| + e(1 - |a|D)} = \frac{|a_0|}{|a|} = |a_0|D$$

★眼の位置に関係なく倍率は $|a_0|D$ となる。

③ $|a| < \frac{1}{D}$ (焦点距離より近い位置に物体を置く)

$$|a|D < 1 \Rightarrow 1 - |a|D > 0$$

$$e \uparrow \Rightarrow |a| + e(1 - |a|D) \uparrow \Rightarrow \frac{|a_0|}{|a| + e(1 - |a|D)} \downarrow$$

i) $e < \frac{1}{D}$ の時、 $m \downarrow$

ii) $e = \frac{1}{D}$ の時、 $m = |a_0|D$

iii) $e > \frac{1}{D}$ の時、 $m \downarrow$

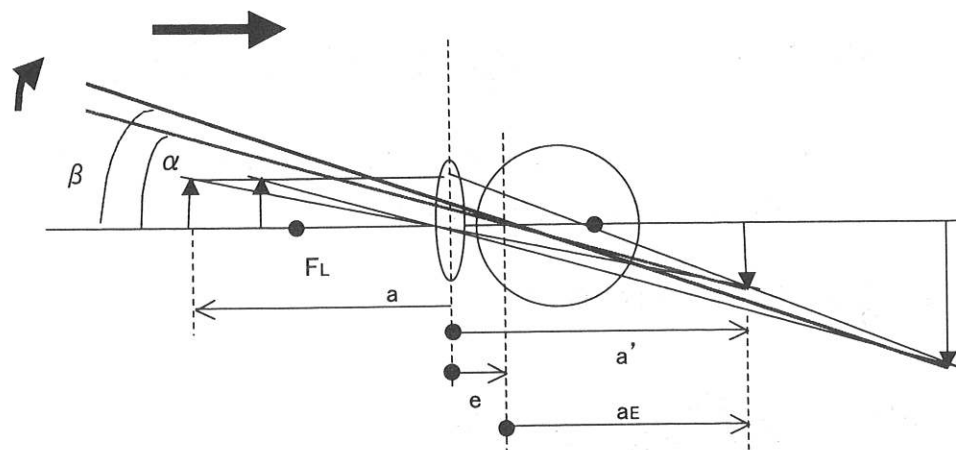
★焦点距離よりも短い距離に物体があれば眼をレンズから遠ざけると倍率は減少する。焦点上に眼があるときは $|a_0|D$ となる。

Ⅲ. ルーベ-眼間の距離、物体-ルーベ間距離の変化が凸レンズの倍率に及ぼす変化を図示すると次のようになる。

1. 眼を静止して物体をレンズに近づける場合

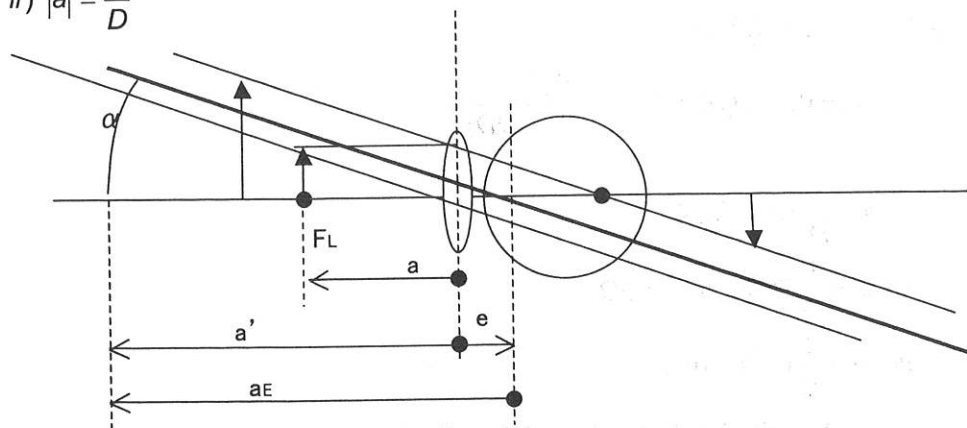
① $e < \frac{1}{D}$

i) $|a| > \frac{1}{D}$



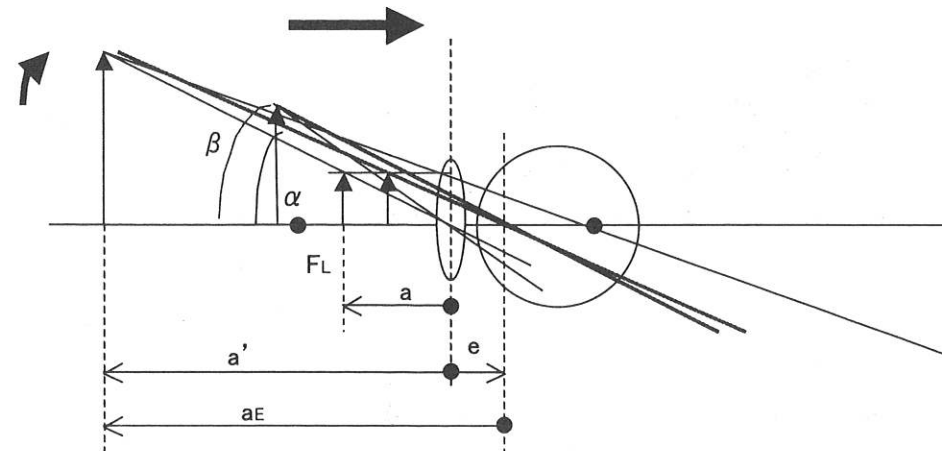
物体を近づけると実像が遠ざかり、 $\alpha < \beta$ となり、倍率は増加する。
遠視眼は遠点と結像点が一致すれば見えるが、物体が近づくにつれて大きな調節力を必要とするので通常はぼけた像になる。

ii) $|a| = \frac{1}{D}$



無調節で基準倍率の $|a_0|D$ となる。

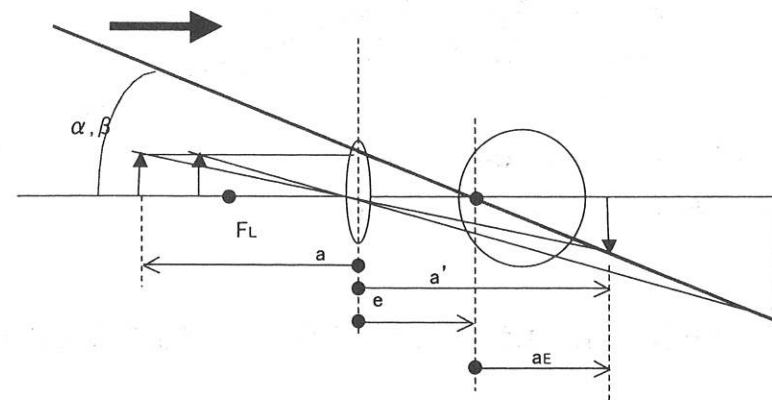
iii) $|a| < \frac{1}{D}$



物体を近づけると虚像が近付き、 $\alpha < \beta$ となり、倍率は増加する。
つまり、調節力を使うと倍率は $|a_0|D$ より大きくなる。近視の場合も $|a_0|D$ より大きくなる。

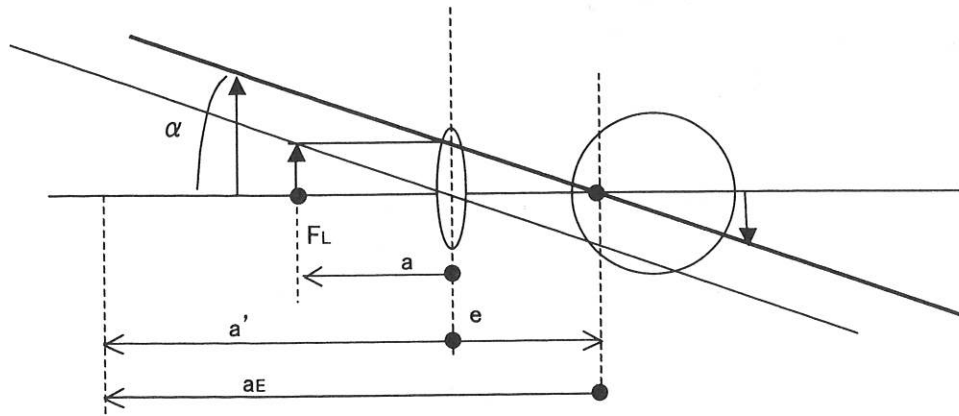
② $e = \frac{1}{D}$

i) $|a| > \frac{1}{D}$



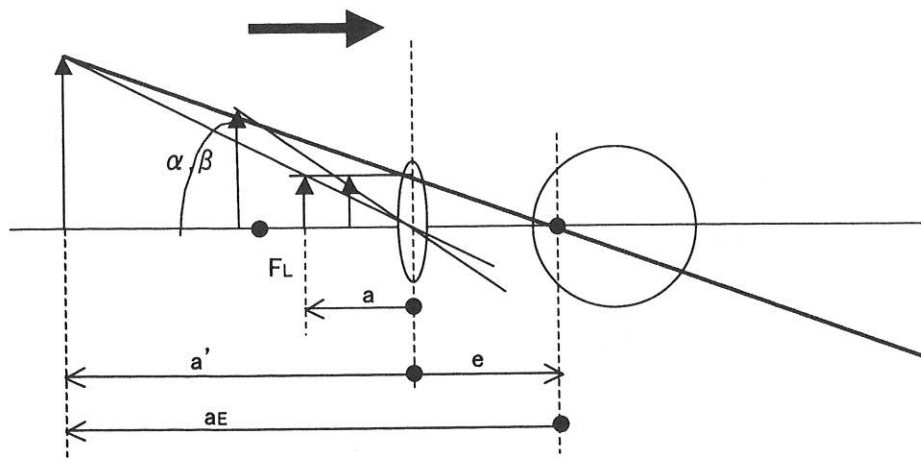
遠視であれば明視可能で、物体を近づけると必要な調節力は増加するが、倍率は基準倍率の $|a_0|D$ となる。

ii) $|a| = \frac{1}{D}$



無調節で基準倍率 $|a_0|D$ が得られる。

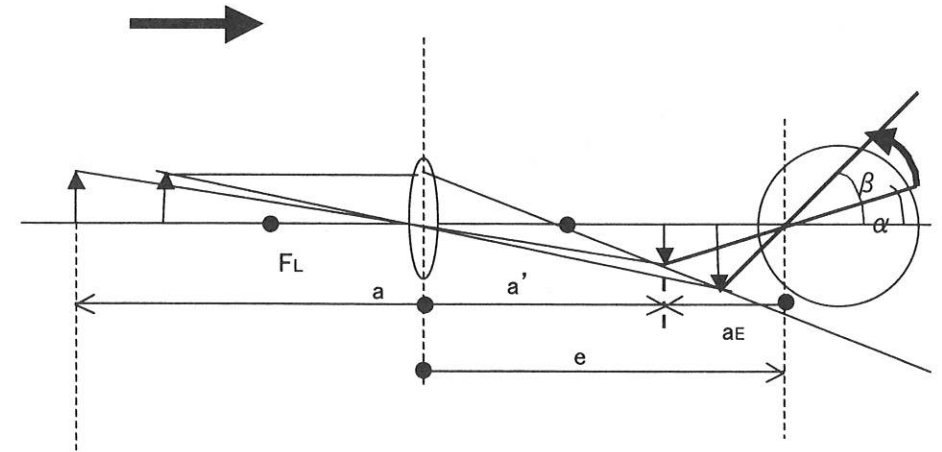
iii) $|a| < \frac{1}{D}$



物体を近づけると必要な調節力は大きくなるが倍率は基準倍率の $|a_0|D$ となる。

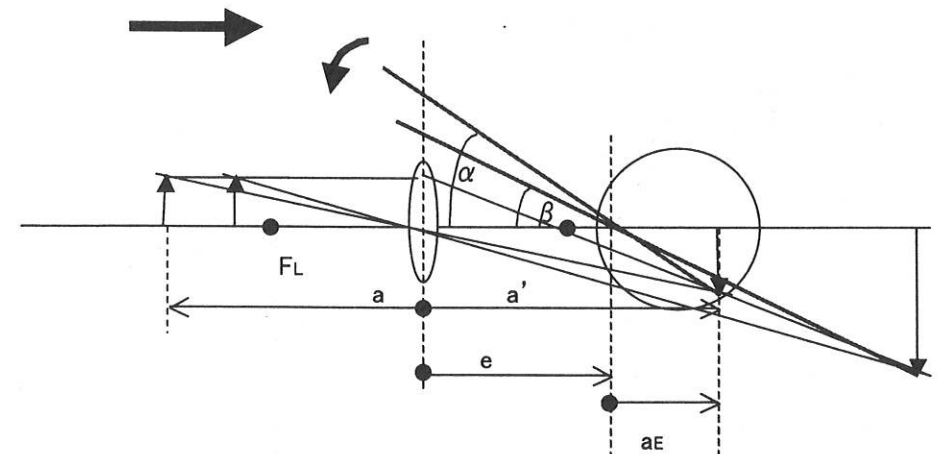
③ $e > \frac{1}{D}$

i) $\frac{1}{D} < \frac{a}{1+aD} < e$



物体が近付くと実像が眼に近くなり、 $\alpha < \beta$ となって倒立像が大きくなり、倍率は増加する。

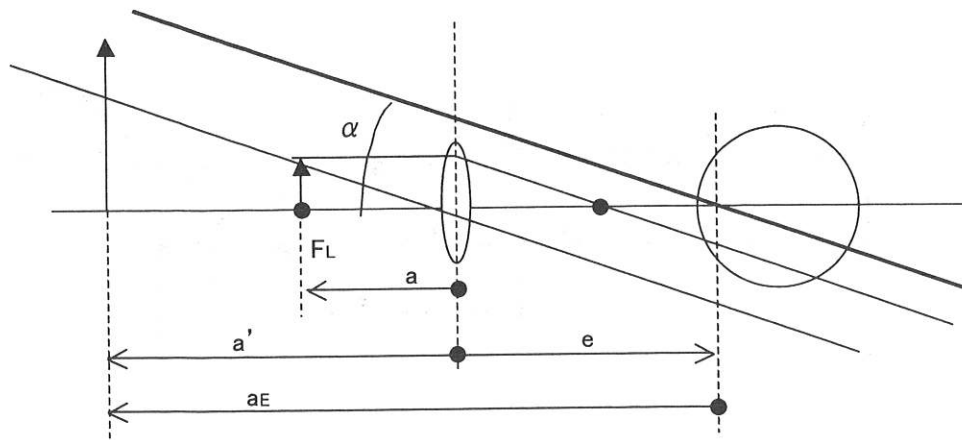
ii) $\frac{1}{D} < e < \frac{a}{1+aD}$



物体を近づけると実像が遠ざかり、 $\alpha > \beta$ となって、倍率は減少する。遠視の場合は $|a_0|D$ より大きく見える。

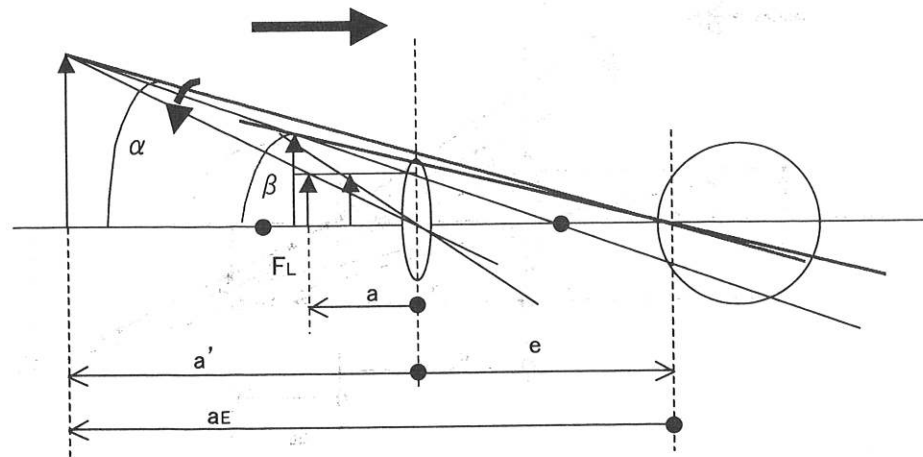
(point) 遠視の場合は虚像ではなく実像が遠点にくるようにする。つまり、物体をできるだけ焦点から遠ざけ、眼を焦点から遠ざけて実像が遠点にくるようにレンズの位置を調節すると大きな倍率が得られる。

iii) $|a| = \frac{1}{D}$



無調節で基準倍率 $|a_0|D$ となる。

iv) $|a| < \frac{1}{D}$

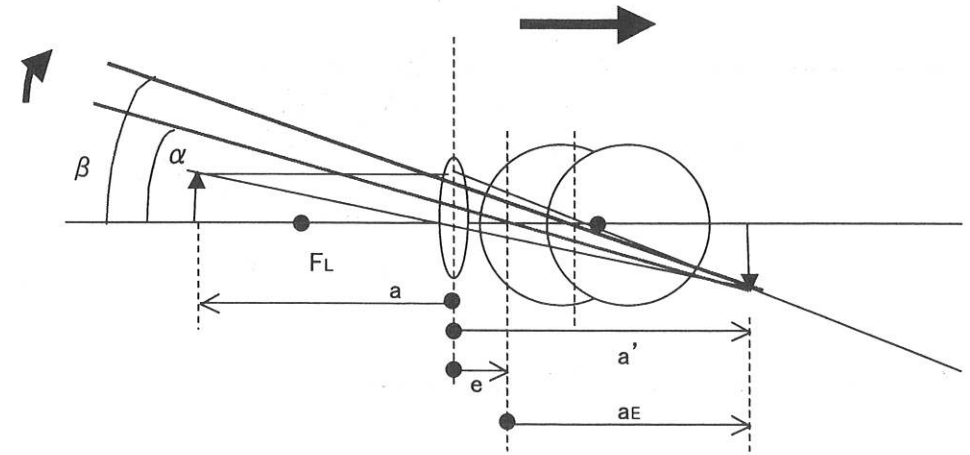


物体を近づけると虚像が近付き、 $\alpha > \beta$ となって倍率は減少する。

2. 物体を静止して眼をレンズから遠ざける場合

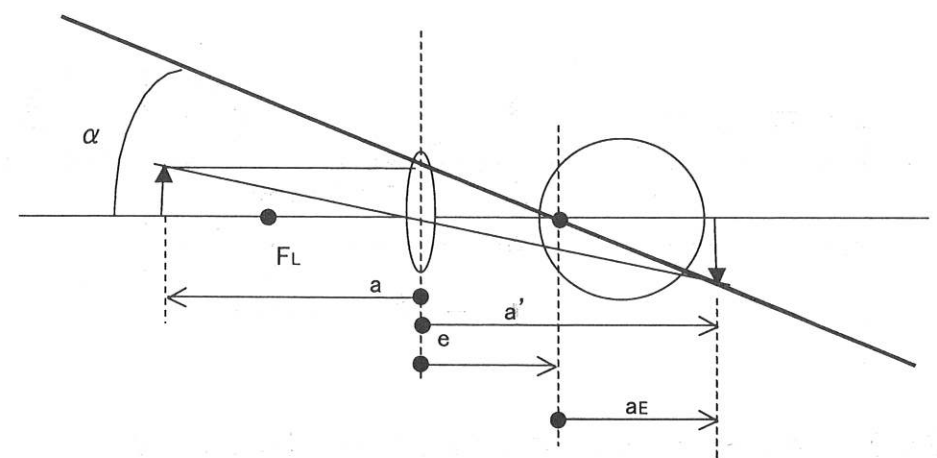
① $|a| > \frac{1}{D}$

i) $e < \frac{1}{D}$



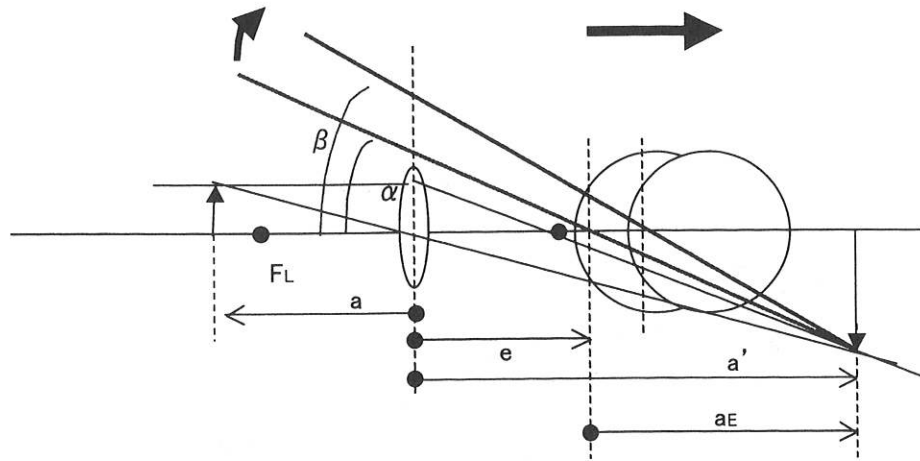
眼をレンズから遠ざけると $\alpha < \beta$ となり、倍率は増加する。

ii) $e = \frac{1}{D}$



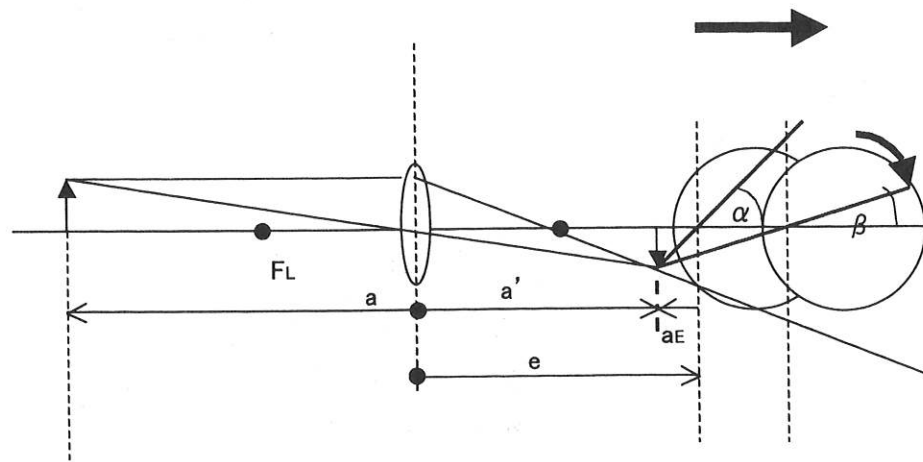
基準倍率 $|a_0|D$ となるが、調節が必要となる。

iii) $\frac{1}{D} < e < \frac{a}{1+aD}$



眼をレンズから遠ざけると $\alpha < \beta$ となり、倍率は増加する。

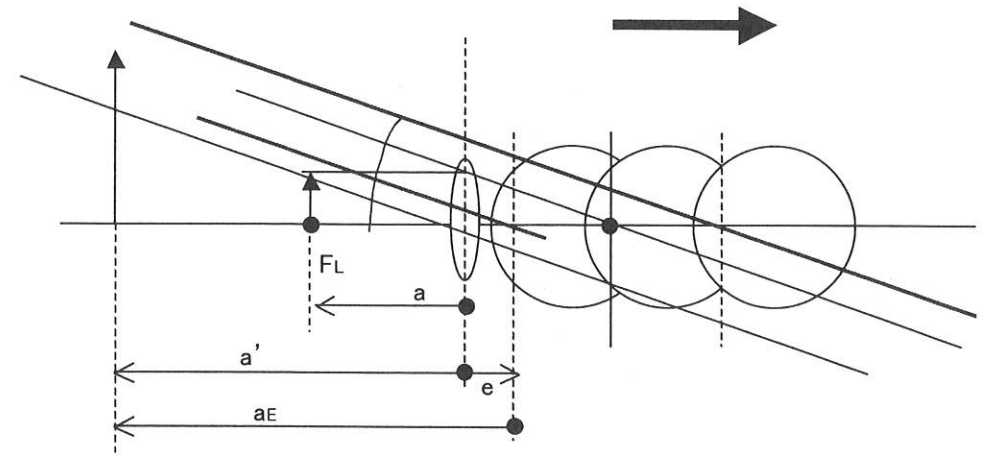
iv) $\frac{1}{D} < \frac{a}{1+aD} < e$



眼を遠ざけると $\alpha > \beta$ となって倒立像が小さくなり、倍率が減少する。

② $|a| = \frac{1}{D}$

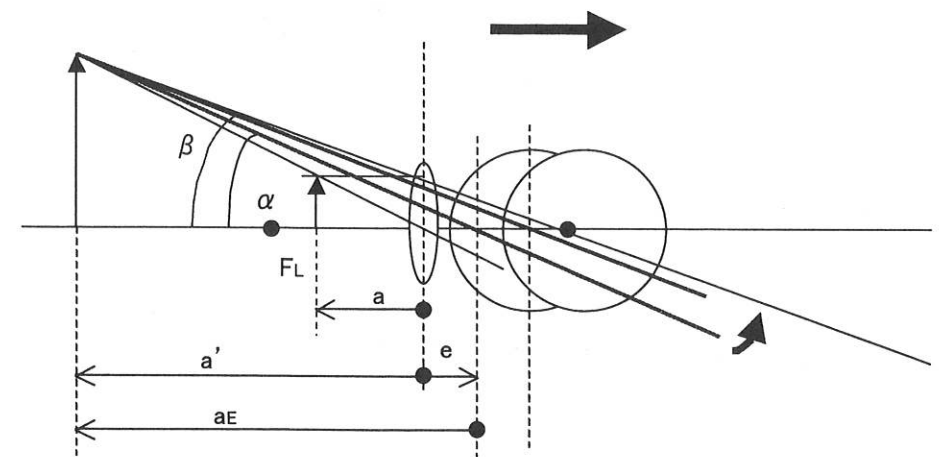
i) $e < \frac{1}{D}, e = \frac{1}{D}, e > \frac{1}{D}$



物体が焦点上にあれば、眼の位置に関係なく無調節で基準倍率 $|a_0|D$ が得られる。

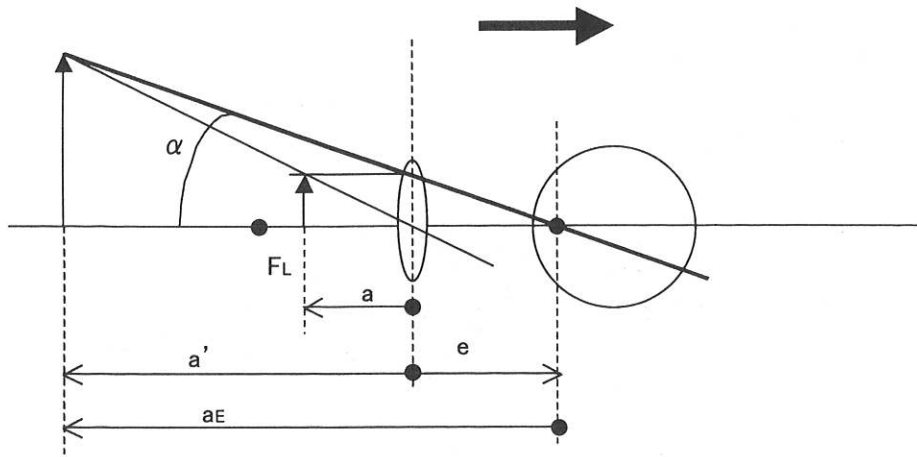
③ $|a| < \frac{1}{D}$

i) $e < \frac{1}{D}$



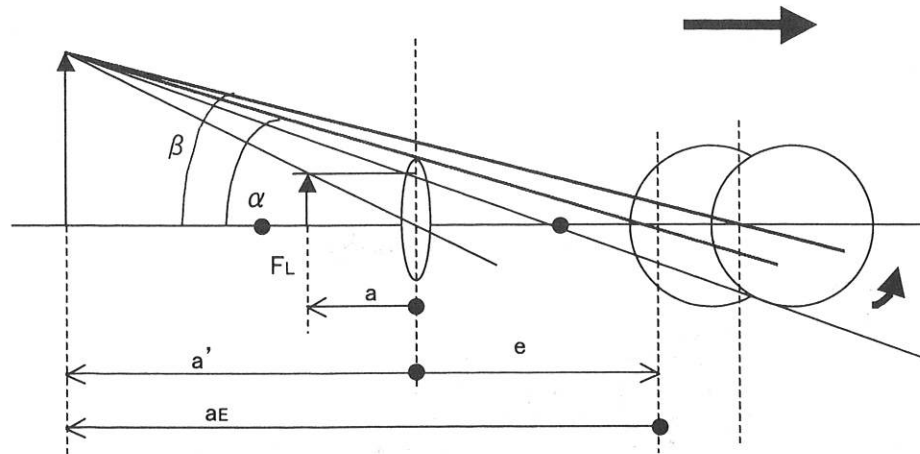
眼をレンズから遠ざけると $\alpha > \beta$ となり、倍率は減少する。

ii) $e = \frac{1}{D}$



眼が焦点上にあると基準倍率 $|a_0|D$ となる。調節が必要となる。

iii) $e > \frac{1}{D}$

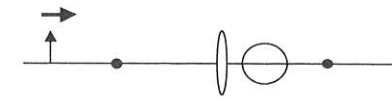


眼をレンズから遠ざけると $\alpha > \beta$ となり倍率は減少する。

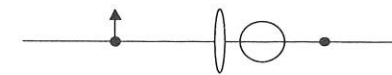
IV. まとめ

1. 眼を静止して物体をレンズに近づける

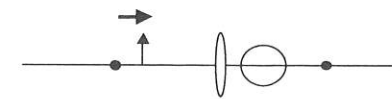
① $m \uparrow$



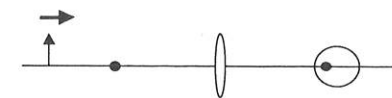
$m = |a_0|D$



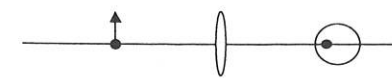
$m \uparrow$



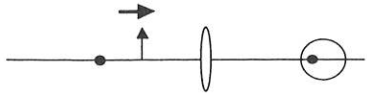
② $m = |a_0|D$



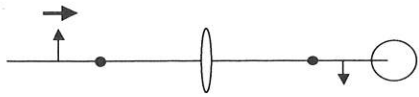
$m = |a_0|D$



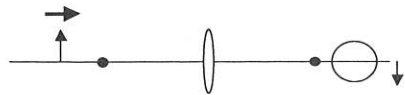
$$m = |a_0|D$$



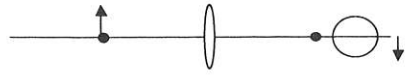
③ $m \uparrow$



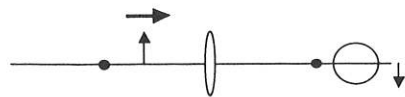
$m \downarrow$



$$m = |a_0|D$$

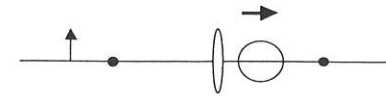


$m \downarrow$

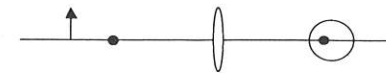


2. 物体を静止して眼をレンズから遠ざける

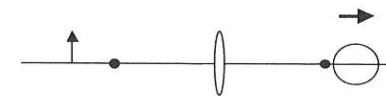
① $m \uparrow$



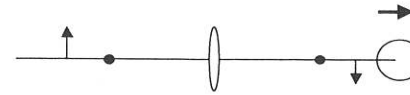
$$m = |a_0|D$$



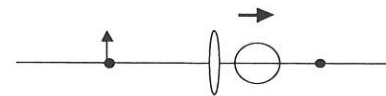
$m \uparrow$



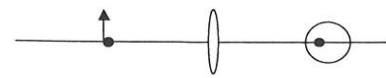
$m \downarrow$



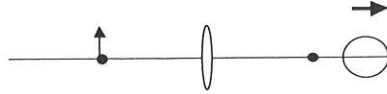
② $m = |a_0|D$



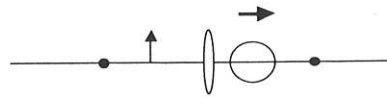
$$m = |a_0|D$$



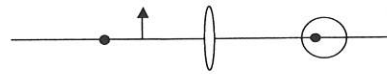
$$m = |a_0|D$$



③ $m \downarrow$



$$m = |a_0|D$$



$m \downarrow$



参考文献

Günter, Roth 1988 Allgemein Optik. Herausgeber. 119-120.

Roland, Enders 1995 Die Optik des Auges und der Sehhilfen.

Herausgeber. 195-198.